ISTITUTO SALESIANO
«Beata Vergine di San Luca»
via Jacopo della Quercia, 1 - 40128 BOLOGNA
tel. 051/41.51.711 – *www.salesianibologna.net*
presidesup.bolognabv@salesiani.it
Il Preside

PASSERELLE/IDONEITÀ

MATEMATICA

PROGRAMMI DEL BIENNIO

MATERIA COMUNE

Prof.: LORENZO MATTIOLI - mattioli.lorenzo.PROF@salesianibologna.it

Prof.: PAOLA PELAGALLI - pelagalli.paola.PROF@salesianibologna.it

Prof.ssa: FRANCESCA FERLIN - ferlin.francesca.prof@salesianibologna.it

Testo di riferimento: Matematica.bianco, Bergamini-Trifone-Barozzi, Zanichelli editore

A) Argomenti su cui verterà la prova (relativamente al programma di PRIMA PROFESSIONALE):

- **Gli insiemi numerici e le loro operazioni (cap 1,2).**
  - Le quattro operazioni (pg. 6-8, 10-11).
  - Le proprietà delle potenze con esponente naturale (pg. 10, 15-18) e con esponente intero (pg. 81)
  - Massimo comun divisore e minimo comune multiplo (pg. 18-19)
  - Le operazioni con i numeri interi (pg. 25-29)
  - Le operazioni con i numeri razionali (pg. 71, 77-80)
  - Percentuali e proporzioni (pg. 82,83-84)
  - I numeri decimali (pg. 85-87)
- **Il calcolo letterale: monomi e polinomi (cap 4)**
  - Monomi: definizioni e operazioni (pg. 165-170)
  - Polinomi: definizioni e operazioni (pg. 172-176)
  - I prodotti notevoli (pg. 176-178).
- **Le equazioni di primo grado (cap 6)**
  - Le equazioni: definizioni e principi di equivalenza (pg. 303-308)
  - Le equazioni numeriche intere (pg 308-310)

ISTITUTO SALESIANO "B.V.S.L." SCUOLE SECONDARIE PARITARIE PRESIDENZA BOLOGNA

Esercizi o domandi simili a quelle che potrebbero capitare durante la prova:

Fare riferimento agli esercizi presenti nelle fotocopie di recupero allegate aventi i seguenti titoli:

- Le espressioni con le quattro operazioni in N.
- Espressioni e proprietà delle potenze in N.
- Le proprietà delle potenze in Z.
- Massimo comune divisore e minimo comune multiplo.
- Le espressioni con le quattro operazioni (in Q).
- Espressioni e proprietà delle potenze (in Q).
- Le espressioni con i monomi.
- Le espressioni con i polinomi.
- I prodotti notevoli.
- Le equazioni numeriche.

Materiale allegato (fotocopie del testo o altro – da lasciare alla Presidenza):

- Fotocopie: I monomi e i polinomi, cap. 4.
- Fotocopie: Le equazioni, cap. 6.
- Fotocopie di recupero elencate negli esercizi.

B) Argomenti su cui verterà la prova (relativamente al programma di SECONDA PROFESS.):

- **Sistemi lineari**
  Sostituzione e confronto
- **Disequazioni di 1° fratte**
- **Equazioni di 2° grado**

- **Geometria analitica**
  Retta e parabola (rappresentazione nel piano cartesiano)
  Significato geometrico dei parametri (m, q, a,b,c)

Esercizi o domandi simili a quelle che potrebbero capitare durante la prova:

- Vedi esercizi presenti nelle fotocopie allegate
-

Materiale allegato (fotocopie del testo o altro – da lasciare alla Presidenza):

- Esempi di verifiche (vedi fotocopie allegate)

RECUPERO
LE ESPRESSIONI CON LE QUATTRO OPERAZIONI IN $\mathbb{N}$

1 **COMPLETA**

Semplifica la seguente espressione:

$\{[10 \cdot (2+2)] : [16-(3 \cdot 2)]\} + 3 \cdot (4-2)$.

$\{[10 \cdot (2+2)] : [16-(3 \cdot 2)]\} + 3 \cdot (4-2) =$

$= \{[10 \cdot (\ldots)] : [16-(\ldots)]\} + 3 \cdot (\ldots) =$ Esegui le operazioni nelle parentesi tonde.

$= \{[\ldots] : [\ldots]\} + 6 =$ Esegui le operazioni nelle parentesi quadre.

$= \{\ldots : \ldots\} + 6 =$ Esegui le operazioni nelle parentesi graffe

$= \ldots + 6 = \ldots$ e scrivi il risultato

2 **PROVA TU**

Semplifica la seguente espressione:

$\{[(24-6 \cdot 3)+5 \cdot 3] : (9 \cdot 2-15)-3+10\} : 2$.

$\{[(24-6 \cdot 3)+5 \cdot 3] : (9 \cdot 2-15)-3+10\} : 2 =$

$= \{[(24-\ldots)+15] : (18-\ldots)-3+10\} : 2 =$

$= \{[\ldots+15] : \ldots-3+10\} : 2 =$

$= \{\ldots : \ldots-3+10\} : 2 =$

$= \{\ldots-3+10\} : 2 =$

$= \ldots : 2 =$

Semplifica le seguenti espressioni.

3 $[4 \cdot (7-3)+5 \cdot (6-2)]-3 \cdot 10$ [6]

4 $[(2 \cdot 4+7)+(2+8:2) \cdot 5]-(6+2) \cdot 5$ [5]

5 $(12+8-5):5-(6+4-9+1)$ [1]

6 $\{[2 \cdot (4+8)] : [16-4 \cdot 2]\}+3 \cdot (5-2)$ [12]

7 $[(12:3) \cdot 4-2 \cdot (3+1)]-4+3$ [7]

8 $12:(3 \cdot 4)+(2+3) \cdot 5-[6 \cdot (7+1-5)]$ [8]

9 $\{[(13+8-6):3]-(7+3-8+1)\} \cdot 2$ [4]

10 $[5 \cdot (5 \cdot 4-4 \cdot 4)-9]-\{4 \cdot (32:8+4):[(6 \cdot 4):12]-4 \cdot 4\}$ [11]

11 $[3 \cdot (6+2)]+[(13+7+10):2]-12-[2 \cdot (10+2)]-3$ [0]

Copyright © 2012 Zanichelli editore S.p.A., Bologna
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

RECUPERO
ESPRESSIONI E PROPRIETÀ DELLE POTENZE IN $\mathbb{N}$

1 **COMPLETA**

Semplifica la seguente espressione:

$(2^3)^2 : (2^2)^2 \cdot [(2^3)^4 : (2^6)^2]\, 5.$

$(2^3)^2 : (2^2)^2 \cdot [(2^3)^4 : (2^6)^2]\, 5 =$

$= 2^6 : 2^{\cdots} \cdot [2^{\cdots} : 2^{\cdots}] =$ Applica la proprietà della potenza di potenza.

$= 2^{\cdots} : [2^{\cdots}] =$ Applica la proprietà del quoziente di potenze con la stessa base.

$= \ldots : 1 = \ldots$ Sviluppa le potenze ed esegui la moltiplicazione.

2 **PROVA TU**

Semplifica la seguente espressione:

$[(2^6 : 2^4) - 3] \cdot [(6^4 \cdot 6^3) : (6^2 \cdot 6^3)] : (2^2 - 1).$

$[(2^6 : 2^4) - 3] \cdot [(6^4 \cdot 6^3) : (6^2 \cdot 6^3)] : (2^2 - 1) =$

$= [2^{\cdots} - 3] \cdot [6^{\cdots} : 6^{\cdots}] : (4 - 1) =$

$= [\ldots - 3] \cdot 6^{\cdots} : 3 =$

$= \ldots \cdot \ldots : 3 = \ldots$

Semplifica le seguenti espressioni.

3 $(3^3)^3 : (3^3)^2 \cdot [(3^6)^2 : (3^3)^4]$ [27]

4 $\{[(2^3)^4 \cdot (2^2)^3] : (2^3)^3\} : (2^3 \cdot 2)^2$ [2]

5 $\{[(3^4)^5 : (3^5)^4] \cdot (3^4)^2\} : [3 \cdot (3^2)^3]$ [3]

6 $6^6 \cdot 4^6 : (3^2 \cdot 8^2) : 8^4$ [81]

7 $[2^6 \cdot 6^6 : (3^2 \cdot 4^2)] : 6^4$ [16]

8 $[(6^3 \cdot 2^3 : 4^3)] \cdot [(2^3)^3 : (2^2)^3] : 3^3$ [8]

9 $[(5^8 : 5^4)^2 \cdot (5^7 : 5^2)] : 5^{12} + 1^5$ [6]

10 $(4^4 - 4^3)^0 \cdot 4 + 4^3 : 4^2 - (5^3 : 5^2)$ [3]

11 $[(3^5 : 3^4) \cdot 3^2]^2 \cdot [(4^6 : 4^4) \cdot 4]^2 : (3^2 \cdot 4^2)^3$ [1]

12 $(2^5 : 4^2)^3 : 2^3 \cdot [(6^3 : 3^2) \cdot 2^5] : (2^2)^3 \cdot 2^0$ [12]

Copyright © 2012 Zanichelli editore S.p.A., Bologna
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

RECUPERO
LE PROPRIETÀ DELLE POTENZE IN $\mathbb{Z}$

1 **COMPLETA**

Semplifica la seguente espressione:

$[(-3)^2]^2 : \{[(-3)^2]^3 \cdot [(-3)^2]^2 : [(-3)^4]^2\}$.

$[(-3)^2]^2 : \{[(-3)^2]^3 \cdot [(-3)^2]^2 : [(-3)^4]^2\} =$

$= (-3)^4 : \{(-3)^{\cdots} \cdot (-3)^{\cdots} : (-3)^{\cdots}\} =$ Applica la proprietà della potenza di potenza.

$= (-3)^4 : \{(-3)^{\cdots} : (-3)^{\cdots}\} =$ Applica la proprietà del prodotto di potenze con la stessa base.

$= (-3)^4 : (-3)^{\cdots} =$ Applica la proprietà del quoziente di potenze con la stessa base due volte.

$= (-3)^{\cdots} = +9.$ Calcola la potenza.

2 **PROVA TU**

Semplifica la seguente espressione, applicando le proprietà delle potenze:

$[(-21)^3]^2 : [3^4 \cdot (-3)^2] : (-7)^5$.

$[(-21)^3]^2 : [3^4 \cdot (-3)^2] : (-7)^5 =$

$= (-21)^{\cdots} : 3^{\cdots} : (-7)^5 =$

$= (\ldots)^{\cdots} : (-7)^5 =$

$= - \ldots$

Semplifica le seguenti espressioni applicando le proprietà delle potenze.

3 $[(-12)^6 : (4)^6]^4 : (-3)^{21}$ $[-27]$

4 $[(-16)^4 : 8^4]^6 : (-2)^{22}$ $[4]$

5 $[21^4 : (-7)^4]^3 : (-3)^9$ $[-27]$

6 $\{[(6^4)^3 : (6)^4]^2 \cdot 6^4\}^0$ $[1]$

7 $(4^3 : 4^2)^2 - (-3)^3 : (-1-2)^2$ $[19]$

8 $(-3^2)^4 : [(-12 : 4)^2 \cdot (-3)^4] - 3^0$ $[8]$

9 $\{[2^3 \cdot (10-8)^2] : (6-4)^3\} : (-2)$ $[-2]$

10 $\{[(-4)^3]^2 : [(-4)^2]^3\}^0 - \{[(-6)^3 : (-3)^3]\}$ $[-7]$

11 $[(-4)^2]^3 \cdot [(-4)^2]^2 : (-4^4)^2$ $[16]$

12 $[(-2)^3 \cdot (-2)^2 : (-2)^4]^3 - (3^2 - 3 - 1)$ $[-13]$

13 $(6+2)^3 : 4^3 - (-2-1)^3 : (-3)$ $[-1]$

14 $(4-5)^3 - [(-3)^2 \cdot (-2)^2 : 18]^4 : (4-2)^3$ $[-3]$

15 $[(18 - 7 \cdot 2)^3 : 4^2]^3 : (-3-1)^2 - 1$ $[3]$

16 $(2^3 : 2^2) \cdot (-5 - 5 \cdot 3 + 13 + 3) + (2^2 \cdot 3^2) : (-6)^2$ $[-7]$

17 $[(-4)^4 \cdot (-4)^3 : (-4)^6]^2 - (2^3 - 2^2 - 9) \cdot (4^4 : 4^2 - 20)$ $[-4]$

Copyright © 2012 Zanichelli editore S.p.A., Bologna
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

RECUPERO
LE ESPRESSIONI CON LE QUATTRO OPERAZIONI

1 **COMPLETA**

Semplifica la seguente espressione:

$$\left[\frac{1}{3}+\frac{6}{5}:\left(-\frac{18}{10}\right)\right]:\left[\left(\frac{1}{14}-\frac{6}{7}+1\right)\cdot\left(\frac{4}{15}-\frac{4}{3}+\frac{2}{5}\right)\right].$$

$$\left[\frac{1}{3}+\frac{6}{5}:\left(-\frac{18}{10}\right)\right]:\left[\left(\frac{1}{14}-\frac{6}{7}+1\right)\cdot\left(\frac{4}{15}-\frac{4}{3}+\frac{2}{5}\right)\right]=$$

$$=\left[\frac{1}{3}+\frac{6}{5}\cdot\left(-\frac{\dots}{\dots}\right)\right]:\left[\left(\frac{1-\dots+14}{14}\right)\cdot\left(\frac{4-\dots+6}{15}\right)\right]=$$ Esegui le operazioni nelle parentesi tonde e semplifica in croce la prima moltiplicazione.

$$=\left[\frac{1}{3}-\frac{\dots}{\dots}\right]:\left[\left(\frac{\dots}{14}\right)\cdot\left(-\frac{10}{15}\right)\right]=$$ Esegui la prima moltiplicazione e semplifica in croce nella seconda parentesi quadra.

$$=\left[\frac{1-\dots}{3}\right]:\left[-\frac{\dots}{\dots}\right]=$$ Esegui la sottrazione nella prima parentesi quadra.

$$=-\frac{\dots}{3}:\left(-\frac{\dots}{\dots}\right)=-\frac{\dots}{3}\cdot(-7)=+\frac{7}{3}.$$ Trasforma la divisione in moltiplicazione.

2 **PROVA TU**

Semplifica la seguente espressione:

$$\left\{\left[\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{8}\right):\left(\frac{13}{8}-1\right)+4\right]:\left(-\frac{5}{2}\right)+4\right\}\cdot\frac{3}{2}-\frac{13}{6}.$$

$$\left\{\left[\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{8}\right):\left(\frac{13}{8}-1\right)+4\right]:\left(-\frac{5}{2}\right)+4\right\}\cdot\frac{3}{2}-\frac{13}{6}=$$

$$=\left\{\left[\left(\frac{\dots-\dots}{8}\right):\left(\frac{13-\dots}{8}\right)+4\right]:\left(-\frac{5}{2}\right)+4\right\}\cdot\frac{3}{2}-\frac{13}{6}=$$

$$=\left\{\left[\frac{\dots}{8}:\frac{\dots}{8}+4\right]:\left(-\frac{5}{2}\right)+4\right\}\cdot\frac{3}{2}-\frac{13}{6}=$$

$$=\left\{\left[\frac{\dots}{8}\cdot\frac{8}{5}+4\right]\cdot\left(-\frac{2}{\dots}\right)+4\right\}\cdot\frac{3}{2}-\frac{13}{6}=$$

$$=\left\{\dots\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)+4\right\}\cdot\frac{3}{2}-\frac{13}{6}=$$

$$=\left\{-\dots+4\right\}\cdot\frac{3}{2}-\frac{13}{6}=$$

$$=\dots\cdot\frac{3}{2}-\frac{13}{6}=$$

$$=\dots-\frac{13}{6}=$$

$$=\frac{\dots-13}{6}=\dots$$

Copyright © 2010 Zanichelli editore SpA, Bologna [6821 der]
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

Semplifica le seguenti espressioni.

3 $\left[\frac{1}{3}+\frac{6}{5}:\left(-\frac{18}{10}\right)\right]+1$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

4 $\left[\left(\frac{1}{12}+\frac{7}{6}-1\right)\cdot\left(\frac{4}{15}-\frac{2}{3}+\frac{4}{5}\right)\right]$ $\left[\frac{1}{10}\right]$

5 $\left[\left(-\frac{4}{5}-\frac{9}{10}+\frac{5}{3}\right):\left(-\frac{4}{15}\right)\right]$ $\left[\frac{1}{8}\right]$

6 $\left\{\frac{2}{3}:\left[\frac{1}{8}:\left(\frac{5}{2}-\frac{9}{4}\right)\right]\right\}$ $\left[\frac{4}{3}\right]$

7 $\left(-\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right):\left(\frac{4}{3}+1\right)$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

8 $\left[-\left(1-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{5}:\left(\frac{3}{20}\right)\right]\cdot\left(\frac{3}{7}-1\right)$ $\left[-\frac{1}{3}\right]$

9 $\left\{\frac{3}{4}\cdot\left[\left(\frac{7}{20}-\frac{3}{5}+1\right):\frac{3}{5}\right]\right\}$ $\left[\frac{15}{16}\right]$

10 $\left[\left(1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right):\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right)\right]:\left(-\frac{1}{3}\right)$ $[-2]$

11 $\left[\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)\right]:\left[\frac{4}{9}:\left(\frac{4}{3}-2\right)\right]$ $\left[\frac{15}{4}\right]$

12 $\left\{\left[-\frac{5}{4}-2\left(-\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\right)\right]\cdot\left(2+\frac{2}{3}\right)-1\right\}:\left(\frac{1}{3}-2\right)-\frac{4}{3}$ $\left[-\frac{1}{3}\right]$

Copyright © 2010 Zanichelli editore SpA, Bologna [6821 der]
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

RECUPERO
ESPRESSIONI E PROPRIETÀ DELLE POTENZE

1 **COMPLETA**

Semplifica la seguente espressione:

$$\left[\left(\frac{4}{5}-\frac{9}{10}+\frac{5}{3}\right):\left(-\frac{4}{15}\right)\right]^2\cdot\left(-\frac{3}{47}\right)^2+\frac{1}{4}-2.$$

$$\left[\left(\frac{4}{5}-\frac{9}{10}+\frac{5}{3}\right):\left(-\frac{4}{15}\right)\right]^2\cdot\left(-\frac{3}{47}\right)^2+\frac{1}{4}-2=$$

$$=\left[\left(\frac{24-\ldots+\ldots}{30}\right):\left(-\frac{4}{15}\right)\right]^2\cdot\left(-\frac{3}{47}\right)^2+\frac{1}{4}-2=$$ Esegui le operazioni dentro le parentesi tonde.

$$=\left[\left(\frac{\ldots}{30}\right)\cdot\left(-\frac{15}{4}\right)\right]^2\cdot\left(-\frac{3}{47}\right)^2+\frac{1}{4}-2=$$ Trasforma la divisione in moltiplicazione.

$$=\left(\frac{\ldots}{8}\right)^2\cdot\left(-\frac{3}{47}\right)^2+\frac{1}{4}-2=$$ Esegui la moltiplicazione e applica la proprietà del prodotto di potenze con lo stesso esponente.

$$=\left(\frac{\ldots}{\ldots}\right)^2+\frac{1}{4}-2=$$ Calcola la potenza ed esegui le operazioni.

$$=\frac{\ldots}{64}+\frac{1}{4}-2=\frac{\ldots+16-\ldots}{64}=-\frac{103}{64}.$$

2 **PROVA TU**

Semplifica la seguente espressione:

$$\left[\left(5+\frac{2}{3}\right):\left(9-\frac{1}{2}\right)\right]^2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left[\left(\frac{3}{2}\right)^4:\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]+\frac{9}{4}.$$

$$\left[\left(5+\frac{2}{3}\right):\left(9-\frac{1}{2}\right)\right]^2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left[\left(\frac{3}{2}\right)^4:\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]+\frac{9}{4}=$$

$$=\left[\left(\frac{\ldots+2}{3}\right):\left(\frac{\ldots-1}{2}\right)\right]^2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^{\ldots}+\frac{9}{4}=$$

$$=\left[\frac{\ldots}{3}:\frac{\ldots}{2}\right]^2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\frac{9}{4}=$$

$$=\left[\frac{\ldots}{3}\cdot\frac{2}{17}\right]^2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2=$$

$$=\left[\frac{\ldots}{3}\right]^2\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{\ldots}{3}\cdot\frac{5}{2}\right)^2=$$

$$=\left(\frac{\ldots}{3}\right)^2=\ldots$$

Copyright © 2010 Zanichelli editore SpA, Bologna [6821 der]
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

Semplifica le seguenti espressioni applicando le proprietà delle potenze.

3 $1+\left[\left(\frac{3}{2}\right)^3\right]^2:\left\{\left[\left(\frac{3}{2}\right)^2\right]^1:\left(-1+\frac{1}{3}\right)^4\right\}$ [2]

4 $\left[\left(\frac{5}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^2\right]^2:\left[\left(1+\frac{2}{3}\right)^2\right]^6-1$ $\left[\frac{16}{9}\right]$

5 $\left[\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}-\frac{1}{3}\right)^2:\left(-1+\frac{3}{4}\right)^2\right]$ $\left[\frac{1}{9}\right]$

6 $\left\{\left[\frac{1}{5}:\left(1-\frac{3}{5}\right)^2-\frac{1}{2}\right]^3:\left(\frac{3}{4}\right)^3\right\}$ [1]

7 $\left[\left(1-\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^3:\left(\frac{13}{12}-\frac{1}{4}\right)^3\right]$ $\left[\frac{25}{36}\right]$

8 $\left[\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)^2:\left(-1+\frac{1}{2}\right)^2\right]-2$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

9 $\left[\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right)^3:\left(\frac{3}{8}-\frac{5}{4}+\frac{1}{2}\right)^3\right]:\left(1-\frac{1}{5}\right)$ $\left[\frac{16}{25}\right]$

10 $\left(\frac{2}{3}\right)^2:\left[\left(\frac{4}{3}\right)^3:\left(\frac{4}{3}\right)\right]+\left(-\frac{3}{4}\right)^3:\left[\left(-\frac{3}{4}\right)^3\right]^2:\left(-1+\frac{1}{4}\right)^{-4}$ $\left[-\frac{1}{2}\right]$

11 $\left[\left(\frac{4}{5}-2\right)^4\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)^{-4}\right]:\left[(-2)^{-4}:\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^{-3}+1$ $[-1]$

Copyright © 2010 Zanichelli editore SpA, Bologna [6821 der]
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

RECUPERO
LE ESPRESSIONI CON I MONOMI

1 **COMPLETA**

Semplifica la seguente espressione:

$$\frac{1}{4}ab \cdot ab^3 + \left[\left(-\frac{1}{3}a^2b^2\right)^3 : \frac{2}{9}a^4b^2\right].$$

$$\frac{1}{4}ab \cdot ab^3 + \left[\left(-\frac{1}{3}a^2b^2\right)^3 : \frac{2}{9}a^4b^2\right] =$$

$$= \frac{1}{4}ab \cdot ab^3 + \left[-\frac{1}{27}a^{\cdots}b^{\cdots} : \frac{2}{9}a^4b^2\right] =$$ Esegui la potenza e calcola il prodotto degli esponenti.

$$= \frac{1}{4}a^{\cdots}b^{\cdots} + \left[-\frac{1}{27} \cdot \frac{9}{2}a^{\cdots}b^{\cdots}\right] =$$ Esegui la moltiplicazione, sommando gli esponenti, e la divisione, calcolando la differenza degli esponenti.

$$= \frac{1}{4}a^{\cdots}b^{\cdots} + \left[-\frac{\cdots}{\cdots}a^2b^4\right] =$$ Semplifica in croce nella parentesi quadra.

$$= \frac{1}{4}a^2b^4 - \frac{\cdots}{\cdots}a^2b^4 =$$ Elimina la parentesi quadra.

$$= \frac{\cdots - \cdots}{12}a^2b^4 = \frac{\cdots}{12}a^2b^4.$$ Somma i termini simili.

2 **PROVA TU**

Calcola la seguente somma:

$$x^2 + (-x) - 3ab + (-4x^2) + 5ab + x.$$

$$x^2 + (-x) - 3ab + (-4x^2) + 5ab + x =$$

$$= x^2 - \ldots - 3ab \ldots 4x^2 + 5ab + x =$$

$$= \underline{\underline{x^2}} - \ldots - \underbrace{3ab} \ldots \underline{\underline{4x^2}} + 5ab + x =$$

$$= (1 - \ldots)x^2 + (-3 + \ldots) \ldots =$$

$$= - \ldots x^2 + \ldots ab.$$

Copyright © 2010 Zanichelli editore SpA, Bologna [6821 der]
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

RECUPERO
I PRODOTTI NOTEVOLI

1 **COMPLETA**

Semplifica la seguente espressione:

$(b+2)(b-2)-(b+2)^2$.

$(b+2)(b-2)-(b+2)^2=$

$=(b^{\cdots}-\ldots)-(b^{\cdots}+4b+\ldots)=$ Calcola il prodotto notevole e sviluppa il quadrato.

$=\cancel{\ldots}-4-\cancel{b^{\cdots}}-4b-\ldots=$ Togli le parentesi cambiando i segni ai termini del secondo polinomio.

$=-\ldots-4\ldots.$ Somma i termini simili o elimina gli opposti.

2 **PROVA TU**

Semplifica la seguente espressione:

$(x-a)(x+a)-(x-2a)^2$.

$(x-a)(x+a)-(x-2a)^2=$

$=(x^{\cdots}-a^{\cdots})-(x^2-\ldots+4a^2)=$

$=\cancel{x^{\cdots}}-a^{\cdots}-\cancel{x^2}+\ldots-\ldots=$

$=-\ldots a^2+\ldots$

3 **PROVA TU**

Semplifica la seguente espressione:

$(2t+1)^3-(t^2+2t-1)^2$.

$(2t+1)^3-(t^2+2t-1)^2=$

$=(8t^3+3\cdot\ldots\cdot1+3\cdot2t\cdot1+1)-[t^4+4t^2+\ldots+2\cdot t^2\cdot\ldots+2\cdot t^2\cdot(\ldots)+2\cdot\ldots\cdot(-1)]=$

$=(8t^3+\ldots t^2+6t+\ldots)-(t^4+4t^2+\ldots+4t^{\cdots}-2t^2-4t)=$

$=8t^3+\ldots t^2+6t+\cancel{\ldots}-t^4-4t^2-\cancel{\ldots}-4t^{\cdots}\ldots 2t^2\ldots 4t=$

$=\ldots t^3-t^4+\ldots t^2+10t.$

Semplifica le seguenti espressioni utilizzando i prodotti notevoli.

4 $(a-2b)(a+2b)$ $[a^2-4b^2]$

5 $(a+2)(a-2)+4$ $[a^2]$

6 $\left(\frac{1}{2}a+3b\right)\left(\frac{1}{2}a-3b\right)+3b^2$ $\left[\frac{1}{4}a^2-6b^2\right]$

Copyright © 2010 Zanichelli editore SpA, Bologna [6821 der]
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

7 $(3a-2b)^2$ $[9a^2-12ab+4b^2]$

8 $(a+2b)^2-4ab$ $[a^2+4b^2]$

9 $\left(\frac{1}{2}a-b\right)^2-2ab$ $\left[\frac{1}{4}a^2-3ab+b^2\right]$

10 $(a+3)(a-3)-(a+3)^2$ $[-6a-18]$

11 $(2a+1)^2-(2a-2)(2a+2)-5$ $[4a]$

12 $(a-2b^2+3)^2$ $[a^2+4b^2+9-4ab^2+6a-12b^2]$

13 $\left(a^2-\frac{1}{2}ab-b^2\right)^2$ $\left[a^4+\frac{1}{4}a^2b^2+b^4-a^3b-2a^2b^2+ab^3\right]$

14 $\left(\frac{1}{2}a-b+\frac{1}{3}\right)^2$ $\left[\frac{1}{4}a^2+b^2+\frac{1}{9}-ab+\frac{1}{3}a-\frac{2}{3}b\right]$

15 $\left(2a-\frac{1}{2}\right)^3$ $\left[8a^3-\frac{1}{8}-6a^2+\frac{3}{2}a\right]$

16 $(3a+2b)^3$ $[27a^3+8b^3+54a^2b+36ab^2]$

17 $\left(\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}b\right)^3$ $\left[\frac{1}{8}a^3-\frac{8}{27}b^3-\frac{1}{2}a^2b+\frac{2}{3}ab^2\right]$

18 $(a+b)^3+(a-b)^3-6ab^2$ $[2a^3]$

19 $(a^2-a-3)^2-(a^2+a+3)^2$ $[-4a^3-12a^2]$

20 $(t+5)^2+(5-2t)(5+2t)-10t$ $[-3t^2+50]$

21 $(2x+1)^2+(x+1)(x-1)-(x+2)(x-2)$ $[4x^2+4x+4]$

22 $(a^2-a-1)^2+(a-1)^3-a^3(a-1)$ $[5a-4a^2]$

23 $(x+2)^3-(x+3+x^2)^2+(x^3+x^4+1)$ $[6x-x^2]$

Copyright © 2010 Zanichelli editore SpA, Bologna [6821 der]
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

RECUPERO
LE EQUAZIONI NUMERICHE INTERE

1 **COMPLETA**

Risolvi la seguente equazione numerica intera:

$$\frac{3(x+3)}{4} - \frac{3}{2}(x-2) = \frac{6-3x}{4}.$$

$\frac{3x+\ldots}{4} - \frac{3}{2}x + \ldots = \frac{6-3x}{4}$ — Esegui le moltiplicazioni.

m.c.m. $(4, 2) = \ldots$ — Calcola il m.c.m. tra i denominatori.

$\ldots\left(\frac{3x+\ldots}{4} - \frac{3}{2}x + \ldots\right) = \left(\frac{6-3x}{4}\right)\ldots$ — Elimina i denominatori moltiplicando i due membri dell'equazione per il m.c.m.

$3x + \ldots - \ldots + \ldots = 6 - 3x$ — Applica la regola del trasporto.

$3x - \ldots + 3x = 6 - \ldots - \ldots$ — Riduci i termini simili.

$\ldots x = \ldots$

equazione … — Determina la soluzione.

2 **PROVA TU**

Risolvi la seguente equazione numerica intera:

$$x\left(1 + \frac{x}{3}\right) + (3x-2)(3x+2) = (3x+1)^2 - \frac{1}{3}x(2-x).$$

$x + \cancel{\frac{x^{\ldots}}{3}} + 9\cancel{x^{\ldots}} - \ldots = 9\cancel{x^{\ldots}} + 6x + \ldots - \frac{2}{3}x + \cancel{\frac{1}{3}}x^{\ldots}$

$x - \ldots x + \frac{2}{3}x = + \ldots + \ldots$

$\cancel{3} \cdot \frac{3x - \ldots x + 2x}{\cancel{3}} = \frac{+\ldots+\ldots}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3}$

$-\frac{\ldots x}{-\ldots} = \frac{\ldots}{-\ldots}$

$x = -\frac{\ldots}{\ldots}.$

Copyright © 2010 Zanichelli editore SpA, Bologna [6821 der]
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

Risolvi le seguenti equazioni.

3 $3(x-2)+9=7(x-3)$ $[x=6]$

4 $\frac{1}{2}(x-2)-3(x-1)=2-x$ $[x=0]$

5 $\frac{(x-3)}{2}-\frac{(2+x)}{4}=\frac{2-x}{4}$ $[x=5]$

6 $2(3x+2)-2(4-x)=4(2x-3)$ [impossibile]

7 $(x-1)(x+1)=(x+1)^2$ $[x=-1]$

8 $3+(x-2)(x+2)=(x-2)^2+6x$ $\left[x=-\frac{5}{2}\right]$

9 $4(3-x)-4x=4(3-2x)$ [indeterminata]

10 $[x(x-1)-(x-2)^2]=2(x-1)$ $[x=2]$

11 $(x+2)(x-1)-2x(x-2)=1-x^2$ $\left[x=\frac{3}{5}\right]$

12 $\frac{1}{4}[x(x-1)-(x-2)^2]=\frac{1}{3}(x+2)$ $[x=4]$

Copyright © 2010 Zanichelli editore SpA, Bologna [6821 der]
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

RECUPERO
LE DISEQUAZIONI NUMERICHE INTERE

1 **COMPLETA**

Risolvi la seguente disequazione intera:

$$\frac{5}{3}x + \frac{(x-1)^2}{2} \leq \frac{(x+3)^2}{2} + \frac{x-4}{6}$$

$\frac{5}{3}x + \frac{x^2 \ldots + 1}{2} \leq \frac{x^2 \ldots + 9}{2} + \frac{x-4}{6}$ — Sviluppa i prodotti notevoli al numeratore.

m.c.m. $(3, \ldots, 6) = 6$ — Calcola il m.c.m. dei denominatori.

$10x + 3(x^2 \ldots + 1) \leq 3(x^2 \ldots + 9) + x - 4$ — Elimina i denominatori moltiplicando entrambi i membri per il m.c.m.

$10x + \cancel{3x^2} \ldots + 3 \leq \cancel{3x^2} \ldots + 27 + x - 4$ — Esegui le moltiplicazioni e applica la regola di cancellazione.

$10x \ldots\ldots - x \leq -3 + 27 - 4$ — Applica la regola del trasporto.

$\ldots x \leq 20 \rightarrow \ldots x \geq \ldots 20$ — Cambia segno ai due membri e verso alla disequazione.

$x \geq \ldots \frac{20}{\ldots} \rightarrow x \geq \ldots \frac{\ldots}{\ldots}$ — Ricava la soluzione.

2 **PROVA TU**

L'insieme delle soluzioni della disequazione $x \ldots -2$ si può rappresentare sulla retta come:

oppure come

$]-\infty; \ldots[$

3 **PROVA TU**

Risolvi la seguente disequazione intera:

$$3(x-2)^2 - 2 - 6x^2 > 3(1-x)(1+x) + 2x.$$

$3(x^2 - \ldots x + \ldots) - 2 - 6x^2 > 3(1 - x^{\cdots}) + 2x$

$3x^2 - \ldots x + \ldots - 2 - 6x^2 > 3 - 3x^{\cdots} + 2x$

$3x^2 - \ldots x - 6x^2 + 3x^{\cdots} - 2x > - \ldots + 2 + 3$

$- \ldots x > - \ldots$

$\ldots x < + \ldots$

$x < \frac{\ldots}{\ldots}$

$]-\ldots; \ldots[.$

Copyright © 2010 Zanichelli editore SpA, Bologna [6821 der]
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

Risolvi le seguenti disequazioni.

4 $5x + 11 < 2x + 2$ $[x < -3]$

5 $3 - x \geq 2(4x - 3)$ $[x \leq 1]$

6 $2(x - 2) + 3(x - 3) \geq 2$ $[x \geq 3]$

7 $(x + 3)^2 + 3 \leq x(x + 2)$ $[x \leq -3]$

8 $3 + (x + 2)(x - 3) \geq (x + 1)^2$ $\left[x \leq -\frac{4}{3}\right]$

9 $\frac{1}{4}x - 2 > x - 1$ $\left[x < -\frac{4}{3}\right]$

10 $\frac{2x - 1}{2} \geq \frac{x}{5}$ $\left[x \geq \frac{5}{8}\right]$

11 $\frac{x + 4}{2} + \frac{1 - 2x}{3} \geq \frac{x + 3}{2}$ $\left[x \leq \frac{5}{4}\right]$

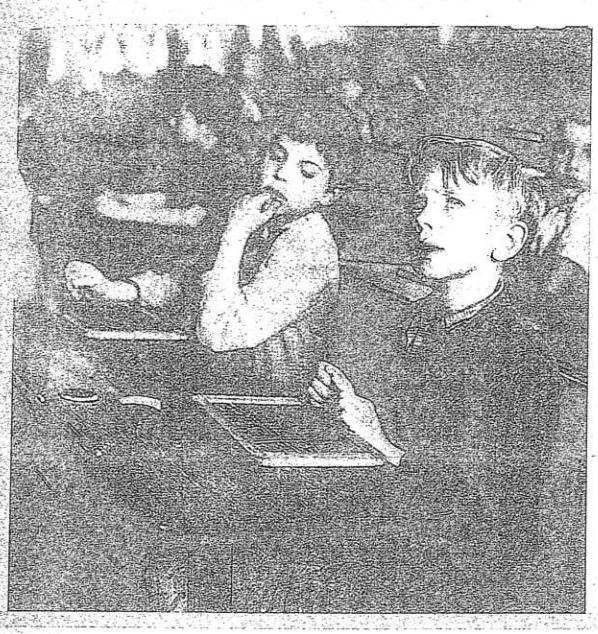
12 $(x + 1)^2 - x < x(x + 1) + 2x - 1$ $[x > 1]$

13 $2x\left(x + \frac{1}{8}\right) - 1 > (x + 1)(2x + 3) - 3x$ $\left[x < -\frac{16}{7}\right]$

Copyright © 2010 Zanichelli editore SpA, Bologna [6821 der]
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

CAPITOLO 4

I monomi e i polinomi



Calcolatrici

Un tempo erano enormi, rumorose e pesanti. Oggi tutti ne hanno almeno una portatile. Ma a volte capita che non si trovi proprio quando serve e allora si devono fare i conti a mente. E anche quando si ha, conviene saper controllare i risultati che si ottengono...

...come si può calcolare a mente 63^2?

Nel sito: ▷ La risposta

1. Che cosa sono i monomi

I *monomi* sono le espressioni letterali più semplici. Li troviamo spesso in leggi matematiche, fisiche o economiche che legano grandezze di tipo diverso.

Per esempio, se indichiamo con b la base di un triangolo e con h la sua altezza, la sua area A è data dalla formula $A = \frac{1}{2}bh$. Il prodotto $\frac{1}{2}bh$ è un monomio.

D La parola **monomio** deriva dall'unione del prefisso greco *mònos*, che significa «unico», e della parola latina *nomen*, che significa «nome», «termine». Vuole dire dunque «formato da un solo termine».

DEFINIZIONE

Monomio

Un monomio è un'espressione letterale in cui, fra le lettere, compaiono solo moltiplicazioni e potenze. Gli esponenti delle lettere sono numeri naturali.

$3a^5b^3$	**è un monomio**
$3a^5 + b^3$	**non è un monomio**

ESEMPIO Sono monomi:

$$2aba^3, \quad \frac{1}{2}a^6, \quad -bxb^2, \quad -3x^2y^5y, \quad \left(5+\frac{3}{4}\right)a.$$

D Non sono monomi:

$$3\frac{x}{y}, \quad 2(a+b), \quad 4a^3-b^2, \quad \frac{x-y}{2a}.$$

Monomi particolari

Qualunque numero può essere considerato un monomio.

Per esempio, possiamo scrivere il numero 7 anche in tanti altri modi: $7a^0$, $7b^0$, $7a^0b^0x^0$... Quindi 7 è un monomio.

In particolare, 0 è il **monomio nullo**.

La riduzione di un monomio a forma normale

DEFINIZIONE

Forma normale

Un monomio è ridotto a forma normale quando è scritto come prodotto fra un numero e una o più lettere, diverse fra loro, con eventuali esponenti.

$6x^4y^6$ è ridotto a forma normale

$6x^3y^6x$ non è ridotto a forma normale

D Sono monomi ridotti a forma normale:

$\frac{4}{3}a^2b, \quad -3xz^4, \quad a^3b^4.$

I monomi $6a3ab$ e $12a^2b^3(-2)a^3$ non sono ridotti a forma normale.

Per ridurre a forma normale un monomio, si applicano le proprietà commutativa e associativa della moltiplicazione e la prima proprietà delle potenze.

ESEMPIO Riduciamo a forma normale il monomio $2ab^2\,3b^3a^2$.
Applichiamo la proprietà commutativa della moltiplicazione:

$$2ab^2\,3b^3a^2 = 2 \cdot 3aa^2b^2b^3 =$$

Applichiamo la proprietà associativa della moltiplicazione:

$$= (2 \cdot 3)(aa^2)(b^2b^3) =$$

Calcoliamo i prodotti, applicando la prima proprietà delle potenze:

$$= 6a^3b^5.$$

D Prima proprietà delle potenze:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$

DEFINIZIONE

Coefficiente e parte letterale

In un monomio ridotto a forma normale, il fattore numerico è il coefficiente, le lettere sono la parte letterale.

$6\,a^8bc^2$ — parte letterale

coefficiente

D D'ora in poi, parlando di monomi, intenderemo monomi ridotti a forma normale.

ESEMPIO

MONOMIO	COEFFICIENTE	PARTE LETTERALE
$\frac{4}{3}a^2b$	$\frac{4}{3}$	a^2b
a^3b^2	1	a^3b^2
2	2	qualunque lettera con esponente 0
$-xz^4$	-1	xz^4

D Se il coefficiente di un monomio è uguale a 1 o a -1, il numero 1 non si scrive e viene sottinteso.

Il grado di un monomio

DEFINIZIONE

Grado

Il *grado* di un monomio è la somma di tutti gli esponenti delle lettere. L'esponente con cui compare ogni lettera è detto *grado rispetto alla lettera*.

grado rispetto ad a — grado rispetto a b

$$8a^2b^3$$

grado del monomio

$$2 + 3 = 5$$

ESEMPIO

MONOMIO	GRADO	GRADO RISPETTO AD a	GRADO RISPETTO A b
$\frac{4}{3}a^2b$	3	2	1
$-a^4$	4	4	0
b	1	0	1
10	0	0	0
0	nessuno	nessuno	nessuno

▷ Se un monomio è costituito soltanto da un numero, il suo grado è 0. Per esempio, 8 è un monomio di grado 0.
Al monomio nullo non si attribuisce alcun grado.

2. Le operazioni con i monomi

L'addizione e la sottrazione di monomi

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▷ V06a

Consideriamo l'addizione:

$$2a^2 + 5a^2.$$

Se raccogliamo a fattore comune a^2, otteniamo:

$$(2 + 5)a^2 = 7a^2.$$

Il risultato è un monomio.

Invece, l'addizione:

$$2a^2 + 5a$$

non può essere semplificata in modo che il risultato sia un monomio.

Si ottiene un monomio solo quando i monomi addendi hanno la stessa parte letterale.

DEFINIZIONE

Monomi simili

Monomi che hanno la stessa parte letterale si dicono simili.

$3a^5$ e $4a^5$ **sono simili**

$5a^5$ e $5a^4$ **non sono simili**

La somma o la differenza di due monomi è ancora un monomio solo se i monomi sono simili fra loro. In questo caso, per calcolare la somma, basta applicare la proprietà del raccoglimento a fattore comune.

Anche per i monomi, l'addizione e la sottrazione possono essere indicate sinteticamente con *addizione algebrica* e il loro risultato con *somma algebrica*.

ESEMPIO

$$4a^2b + 6a^2b - 8a^2b =$$

Raccogliamo la parte letterale a fattore comune:

$$= (4 + 6 - 8)a^2b =$$

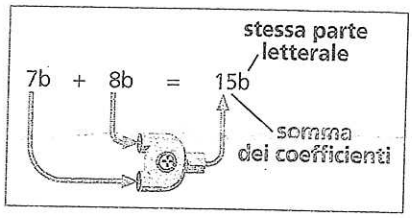
Calcoliamo la somma algebrica dei coefficienti:

$$= 2a^2b.$$

REGOLA

Somma di monomi simili

La somma algebrica di due o più monomi simili è un monomio simile a quelli dati, che ha per coefficiente la somma algebrica dei coefficienti.



$2a$ e $-2a$ sono monomi opposti.

Due monomi simili sono **opposti** se sono opposti i loro coefficienti. La somma di due monomi opposti è 0.

ESEMPIO

$$5ab + (-5ab) = 5ab - 5ab = (5 - 5)ab = 0.$$

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▷ V06c

La moltiplicazione di monomi

Consideriamo la moltiplicazione fra monomi:

$$2a^2 \cdot 7a^3.$$

Possiamo applicare le proprietà commutativa e associativa della moltiplicazione e la prima proprietà delle potenze. Otteniamo:

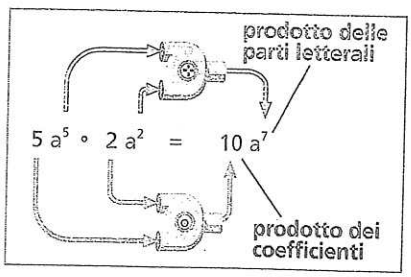
$$2a^2 \cdot 7a^3 = 2 \cdot 7 \cdot a^2a^3 = 14a^5.$$

REGOLA

Prodotto fra monomi

Il prodotto di monomi è sempre un monomio.

Il prodotto fra monomi è un monomio che ha per coefficiente il prodotto dei coefficienti e per parte letterale il prodotto delle parti letterali.



PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI

Un campo da rifare

Nel sito: ▷ Scheda di lavoro

Dopo una delle periodiche inondazioni del Nilo, il campo rettangolare di Mehi, completamente distrutto, doveva essere ricostruito. Mehi pensò che se lo avesse rifatto, sempre rettangolare, ma aumentando del 50% una dimensione e diminuendo del 50% l'altra, avrebbe riottenuto la stessa superficie coltivabile. Aveva ragione?

ANDREA: «Direi di sì: se aumenti tanto quanto diminuisci, il risultato non cambia».

FEDERICA: «Non ne sono poi tanto sicura. Proviamo con qualche esempio?».

▷ Oltre che con degli esempi, aiutati con il calcolo letterale.

La potenza di un monomio

Per eseguire la potenza di un monomio basta applicare le proprietà delle potenze.

ESEMPIO

$$(7a^3)^2 = 7^2(a^3)^2 = 49a^{3\cdot 2} = 49a^6.$$

Applichiamo le proprietà delle potenze relative a:
- potenza di un prodotto $(ab)^n = a^n b^n$;
- potenza di potenza $(a^m)^n = a^{mn}$.

REGOLA

Potenza di un monomio

La potenza di un monomio è un monomio che ha per coefficiente la potenza del coefficiente dato e per parte letterale la potenza della parte letterale.

potenza della parte letterale

$$(5b^5)^2 = 5^2b^{10}$$

potenza del coefficiente

BRAVI SI DIVENTA

Videolezione ▷ V07a

ESEMPIO

$$\left(-\frac{3}{2}a^2b^5\right)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^3(a^2b^5)^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^3 a^{2\cdot 3}b^{5\cdot 3} = -\frac{27}{8}a^6b^{15}.$$

La divisione fra due monomi

Consideriamo la divisione fra monomi:

$$4a^2b^3 : 2b^2.$$

Applicando la proprietà invariantiva della divisione e la proprietà commutativa della moltiplicazione si dimostra che:

$$mx : ny = (m : n)\cdot(x : y).$$

D Per dividere due potenze che hanno la stessa base si esegue la sottrazione fra gli esponenti:

$a^m : a^n = a^{m-n}$.

Possiamo eseguire la divisione fra i coefficienti e la divisione fra le parti letterali e poi applicare la seconda proprietà delle potenze:

$$4a^2b^3 : 2b^2 = (4 : 2)(a^2b^3 : b^2) = 2a^2b^{3-2} = 2a^2b.$$

Il risultato è ancora un monomio.

Ripetiamo le stesse operazioni in un altro caso:

$$4a^2b^3 : 2b^5 = (4 : 2)(a^2b^3 : b^5) = 2a^2b^{3-5} = 2a^2b^{-2}.$$

Il risultato non è un monomio, perché l'esponente di b è negativo.

D È possibile dividere un monomio per un qualunque numero (*diverso da* 0). Per esempio:

$$\frac{3}{2}a : 5 = \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5}\right)a = \frac{3}{10}a.$$

Pertanto, fra i divisori di un monomio sono inclusi anche i numeri (*diversi da* 0).

Divisibilità fra monomi

Un monomio (dividendo) è **divisibile** per un altro monomio (divisore) quando in esso compaiono tutte le lettere del divisore, con gli esponenti maggiori o uguali.

Per esempio, $5a^3b^2c^5$ è divisibile per $-4a^2b^2$, perché $a^3 : a^2 = a^{3-2} = a$ e $b^2 : b^2 = b^{2-2} = b^0 = 1$, mentre non è divisibile per $2a^5b^2c^4$, perché $a^3 : a^5 = a^{3-5} = a^{-2}$.

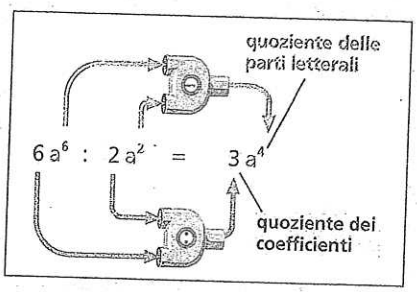
Il monomio divisore non può essere il monomio nullo. Per esempio, la divisione $3a^2b : 0$ non ha significato.

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▶ V07b

REGOLA

Quoziente fra monomi

Dati due monomi, il secondo non nullo e il primo divisibile per il secondo, il loro quoziente è un monomio che ha come coefficiente il quoziente dei coefficienti e come parte letterale il quoziente delle parti letterali.



ESEMPIO

$$6a^5b^4 : 5a^3b = (6 : 5)(a^5 : a^3)(b^4 : b) = \frac{6}{5}a^{5-3}b^{4-1} = \frac{6}{5}a^2b^3.$$

3. Massimo comune divisore e minimo comune multiplo fra monomi

I concetti di massimo comune divisore e minimo comune multiplo che abbiamo visto per i numeri naturali si possono estendere anche ai monomi. Esaminiamo le regole che servono per calcolarli.

4. Che cosa sono i polinomi

I polinomi

Non sempre l'addizione fra monomi ha come risultato un monomio. Per esempio,

$$3a + 2b + 5a - 6b = 8a - 4b,$$

e $8a - 4b$ non è un monomio.

Diamo allora la seguente definizione.

DEFINIZIONE

Polinomio

Si chiama polinomio ogni somma algebrica di monomi.

ESEMPIO

Sono polinomi:

$$a + 5b;\ 3x^2 - 2ax + 7;\ 2cy^3 + 4m^2x - cy^3.$$

Ogni monomio può essere visto come la somma algebrica di se stesso con il monomio nullo:

$$ab^2c = ab^2c + 0.$$

Quindi **ogni monomio è un polinomio**.

I monomi che compongono un polinomio si dicono anche **termini** del polinomio. Per comodità consideriamo solo polinomi che hanno come termini monomi ridotti a forma normale.

ESEMPIO

$$2a^2 + 5b^2 - \frac{1}{2}$$

è un polinomio formato da tre termini, ossia da tre monomi non simili i cui coefficienti sono 2, 5 e $-\frac{1}{2}$.

La riduzione a forma normale

Un polinomio può anche contenere monomi simili:

$$6a^4b^2 - 3a^3b^5 + 2a^4b^2.$$

In tal caso si sommano i monomi simili. Il polinomio che si ottiene,

$$8a^4b^2 - 3a^3b^5,$$

si dice **ridotto a forma normale** (o semplicemente **ridotto**).

D **Polinomio** deriva dall'unione del prefisso greco *polýs*, che significa «molti», e del sostantivo latino *nomen*, che significa «parola», «termine». I molti termini che formano un polinomio sono monomi.

D Non sono polinomi: $\frac{a+b}{a}$; $\frac{2x}{y} - 1$.

D 0, oltre che monomio nullo, è considerato anche **polinomio nullo**.

ESEMPIO

$8x^3y + x^2y^2 - 3x^4$ è un polinomio ridotto a forma normale.

D $7 + 4a^2 + 3ab - a^2 + 5ab$ non è ridotto a forma normale.
Per ridurlo sommiamo i termini simili, ottenendo:

$7 + 3a^2 + 8ab.$

Due polinomi ridotti a forma normale, e non nulli, sono **uguali** quando i monomi del primo polinomio sono uguali ai monomi del secondo polinomio, indipendentemente dall'ordine in cui sono scritti.

ESEMPIO

$$3a^2 - \frac{1}{2}ab + \frac{2}{5}b^2 \quad \text{e} \quad \frac{2}{5}b^2 + 3a^2 - \frac{1}{2}ab$$

sono due polinomi uguali.

I polinomi ridotti a forma normale con 1, 2, 3 e 4 termini hanno nomi particolari. Si chiamano, rispettivamente, *monomi*, *binomi*, *trinomi* e *quadrinomi*.

ESEMPIO

$a^2 - 3ab^5$ è un binomio; $2a^3 - a^2 + 4a + 1$ è un quadrinomio.

Il grado di un polinomio ridotto

Per definire il grado di un polinomio, lo si riduce a forma normale, poi si prende in esame il grado dei singoli monomi da cui è formato.

DEFINIZIONE

Grado di un polinomio ridotto

Si chiama grado di un polinomio ridotto il grado maggiore fra i gradi dei suoi termini.

Inoltre il **grado** di un polinomio **rispetto a una lettera** è il maggiore dei gradi dei suoi termini rispetto a tale lettera.

ESEMPIO Il polinomio

$6a^4b^2 - 3a^3b^5 + 2a^2b$

è di grado 8. Il grado rispetto ad a è 4, rispetto a b è 5.

D Il polinomio:

$2a^4 - a^2b - 2a^4 - 6ab$

non è di quarto grado. Infatti, riducendolo diventa:

$-a^2b - 6ab.$

Dunque è un polinomio di terzo grado.

Un polinomio ridotto è **omogeneo** se tutti i suoi termini hanno lo stesso grado.

ESEMPIO

$8x^3y + x^2y^2 - 3x^4$

è un polinomio omogeneo, in quanto tutti i termini che lo compongono sono di quarto grado.

D $8x^3y + 1$ non è un polinomio omogeneo.

Un polinomio è **ordinato** rispetto a una lettera se i suoi termini sono disposti in modo tale che gli esponenti di quella lettera sono in ordine crescente o decrescente.

ESEMPIO

1. Il polinomio $3x^4 + 7x^2 - x$ è ordinato secondo le potenze decrescenti della lettera x.
2. Il polinomio $-5a^3b + a^2b^2 - 3ab^4$ è ordinato secondo le potenze decrescenti di a e anche secondo le potenze crescenti di b.

D Il polinomio: $6ab^2 + 8a^2b^3 - a^5b$ è ordinato rispetto alla lettera a, ma non è ordinato rispetto a b.

Un polinomio è **completo** rispetto a una lettera se per tale lettera presenta tutte le potenze, dal grado massimo fino al grado 0.

Il termine di grado 0 di un polinomio, ossia quello in cui non compare nessuna lettera, viene detto **termine noto**.

ESEMPIO $2a^3 - a^2 + 4a + 1$ è un polinomio completo.
Infatti la lettera a è presente dal grado 3 al grado 0 (a^3, a^2, a^1, a^0). Il termine noto è 1.

D Se un polinomio in una sola lettera ha grado n ed è completo, ha $n + 1$ termini.

5. Le operazioni con i polinomi

L'addizione

La **somma di due polinomi** è un polinomio che ha per termini tutti i termini dei polinomi addendi.

In generale, il polinomio somma non è ridotto a forma normale.

ESEMPIO Addizioniamo i due polinomi:

$$5x^3 + 6x^2 - 3 \quad \text{e} \quad 7 - 2x + 4x^2 - 6x^3.$$

$$(5x^3 + 6x^2 - 3) + (7 - 2x + 4x^2 - 6x^3) =$$

Il polinomio somma è formato da tutti i termini dei polinomi addendi:

$$= 5x^3 + 6x^2 - 3 + 7 - 2x + 4x^2 - 6x^3 =$$

Il polinomio somma non è ridotto; riduciamo i monomi simili:

$$= -x^3 + 10x^2 - 2x + 4.$$

Cambiando il segno a tutti i termini di un polinomio, si ottiene il **polinomio opposto**. La somma di due polinomi opposti è 0.

D L'opposto del polinomio $3x^2 + 2b^2 - 1$ è $-3x^2 - 2b^2 + 1$.

La sottrazione

La **differenza di due polinomi** è un polinomio che si ottiene addizionando al primo (minuendo) l'opposto del secondo (sottraendo).

ESEMPIO Eseguiamo la sottrazione fra il polinomio $3a^3 + 3a^2b + 5b^2$ e il polinomio $5a^4 + 3a^2b - b^2$.

$$(3a^3 + 3a^2b + 5b^2) - (5a^4 + 3a^2b - b^2) =$$
$$= (3a^3 + 3a^2b + 5b^2) + (-5a^4 - 3a^2b + b^2) =$$
$$= 3a^3 + 3a^2b + 5b^2 - 5a^4 - 3a^2b + b^2 =$$
$$= 3a^3 + 6b^2 - 5a^4.$$

D Anche per i polinomi parliamo di somme algebriche per indicare sinteticamente somme e differenze di polinomi.

La moltiplicazione di un monomio per un polinomio

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▷ V08a

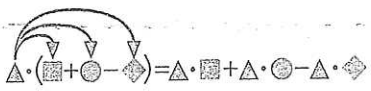
Consideriamo la moltiplicazione $5a^3(a^2 + 2ab)$.
Applichiamo la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione:

$$5a^3(a^2 + 2ab) = 5a^3a^2 + 5a^32ab = 5a^5 + 10a^4b.$$

REGOLA

Prodotto di un monomio per un polinomio

Il prodotto di un monomio per un polinomio è un polinomio che ha come termini i prodotti del monomio per ciascun termine del polinomio dato.



$A \cdot (B + C - D) = A \cdot B + A \cdot C - A \cdot D$

La moltiplicazione di due polinomi

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▷ V08b

Consideriamo la moltiplicazione $(2a^2 - a)(3a^2 - a + 2)$.

Applichiamo la proprietà distributiva, distribuendo il fattore $3a^2 - a + 2$ fra i termini della somma $2a^2 - a$:

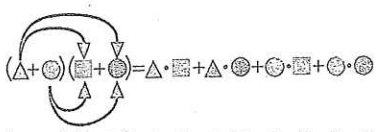
$$(2a^2 - a)(3a^2 - a + 2) = 2a^2(3a^2 - a + 2) - a(3a^2 - a + 2) =$$
$$= 6a^4 - 2a^3 + 4a^2 - 3a^3 + a^2 - 2a = 6a^4 - 5a^3 + 5a^2 - 2a.$$

D Prima eseguiamo le moltiplicazioni seguendo le frecce sopra, poi seguendo le frecce sotto.

REGOLA

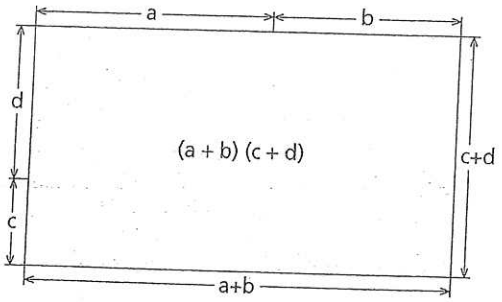
Prodotto di due polinomi

Il prodotto di due polinomi è un polinomio che si ottiene moltiplicando ogni termine del primo polinomio per ogni termine del secondo e addizionando tutti i prodotti ottenuti.

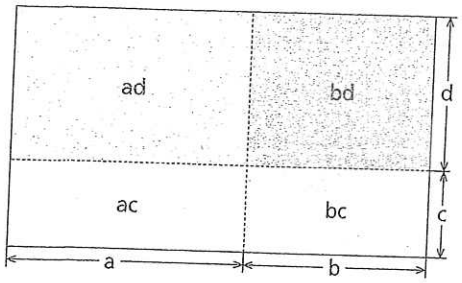


$(A + B)(C + D) = A \cdot C + A \cdot D + B \cdot C + B \cdot D$

D Il grado del polinomio prodotto è la somma dei gradi dei polinomi fattori.



a. La base del rettangolo è la somma di due segmenti di misure *a* e *b*; l'altezza è la somma di due segmenti di misure *c* e *d*.
L'area del rettangolo è:
$S = (a + b)(c + d)$.



b. Il rettangolo può essere visto come l'unione di quattro rettangoli, le cui aree sono *ac, ad, bc, bd*:
$S = ac + ad + bc + bd$.
Risulta $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

△ **Figura 1** Interpretazione geometrica del prodotto fra polinomi.

D Un **prodotto** fra polinomi è **notevole** quando è possibile scrivere il risultato senza passaggi intermedi, utilizzando una formula.

6. I prodotti notevoli

Il prodotto della somma di due monomi per la loro differenza: $(A + B)(A - B)$

Indichiamo con A e B due monomi generici e consideriamo il prodotto della loro somma per la loro differenza: $(A + B)(A - B)$.

LA SOMMA DI DUE MONOMI PER LA LORO DIFFERENZA

A	B	$(A + B)(A - B)$	SVILUPPO DEI CALCOLI	RISULTATO
x	3	$(x + 3)(x - 3)$	$x^2 - 3x + 3x - 9$	$x^2 - 9$
$2yz$	$\frac{1}{3}c$	$(2yz + \frac{1}{3}c)(2yz - \frac{1}{3}c)$	$4y^2z^2 - \frac{2}{3}yzc + \frac{2}{3}yzc - \frac{1}{9}c^2$	$4y^2z^2 - \frac{1}{9}c^2$
$3x$	y	$(3x + y)(3x - y)$	$9x^2 - 3xy + 3xy - y^2$	$9x^2 - y^2$

Quali che siano i monomi A e B, il risultato è sempre del tipo $A^2 - B^2$ e viene chiamato **differenza di due quadrati**.

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▷ V09a

REGOLA

La somma di due monomi per la loro differenza

Il prodotto della somma di due monomi per la loro differenza è il binomio costituito dalla differenza fra il quadrato del primo e il quadrato del secondo.

$$(\bigcirc + \square)(\bigcirc - \square) = \bigcirc^2 - \square^2$$

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

ESEMPIO

$(3a + 5b^3)(3a - 5b^3) = (3a)^2 - (5b^3)^2$; infatti,

$(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$.

Il quadrato di un binomio: $(A + B)^2$

Il quadrato di un numero è il prodotto del numero per se stesso. Il quadrato di un binomio è il prodotto del binomio per se stesso.

IL QUADRATO DI UN BINOMIO

A	B	$(A+B)^2$	$(A+B)(A+B)$	SVILUPPO DEI CALCOLI	RISULTATO
b	5	$(b+5)^2$	$(b+5)(b+5)$	$b^2+5b+5b+25$	$b^2+10b+25$
$3x$	$-2y$	$(3x-2y)^2$	$(3x-2y)(3x-2y)$	$9x^2-6xy-6xy+4y^2$	$9x^2-12xy+4y^2$
$-2a$	$-\frac{1}{2}x$	$\left(-2a-\frac{1}{2}x\right)^2$	$\left(-2a-\frac{1}{2}x\right)\left(-2a-\frac{1}{2}x\right)$	$4a^2+ax+ax+\frac{1}{4}x^2$	$4a^2+2ax+\frac{1}{4}x^2$

Quali che siano i monomi A e B, il risultato è del tipo $A^2 + 2AB + B^2$.

REGOLA

Quadrato di un binomio

Il quadrato di un binomio è un trinomio che ha come termini il quadrato del primo termine, il doppio prodotto del primo termine per il secondo e il quadrato del secondo.

$(\bigcirc + \square)^2 = \bigcirc^2 + 2\bigcirc\square + \square^2$

$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

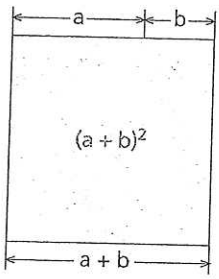
BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▷ V10a

ESEMPIO

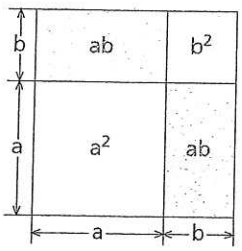
1. $(2x + y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot y + (y)^2 = 4x^2 + 4xy + y^2$.

   $(A + B)^2 = A^2 + 2 \cdot A \cdot B + B^2$

2. $(a^3 - 3)^2 = (a^3)^2 + 2a^3 \cdot (-3) + (-3)^2 = a^6 - 6a^3 + 9$.



a. Il quadrato di lato $a + b$ ha area: $S = (a + b)^2$.



b. Il quadrato precedente è l'unione di:
- un quadrato di lato a (area a^2);
- due rettangoli di lati a e b (area ab);
- un quadrato di lato b (area b^2).

Quindi l'area è: $S = a^2 + 2ab + b^2$.

◁ **Figura 2** L'interpretazione geometrica dell'uguaglianza $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ risale ai Greci.

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▷ V10b

Il quadrato di un trinomio: $(A + B + C)^2$

Calcoliamo il quadrato di un trinomio:

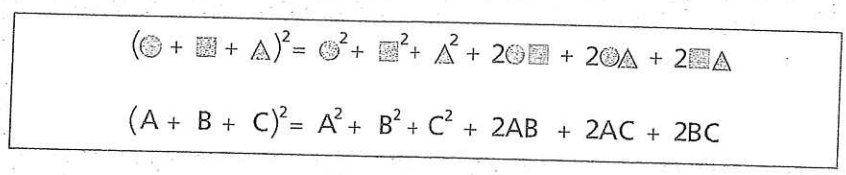
$$(A + B + C)^2 = (A + B + C)(A + B + C) =$$
$$= A^2 + AB + AC + BA + B^2 + BC + CA + CB + C^2 =$$
$$= A^2 + B^2 + C^2 + 2AB + 2AC + 2BC.$$

Quesito. Prova a ricavare una regola per il quadrato di un quadrinomio. Confrontala con quella del quadrato di un trinomio. C'è qualcosa di analogo? Puoi arrivare a una regola generale per il quadrato di unpolinomio?

REGOLA

Quadrato di un trinomio

Il quadrato di un trinomio è un polinomio che ha come termini i quadrati dei tre termini e il doppio prodotto di ciascun termine per ogni termine che lo segue.



ESEMPIO

$$(3a - b - 2c)^2 = 9a^2 + b^2 + 4c^2 + 2 \cdot (3a) \cdot (-b) + 2(3a) \cdot (-2c) +$$
$$+ 2 \cdot (-b) \cdot (-2c) = 9a^2 + b^2 + 4c^2 - 6ab - 12ac + 4bc.$$

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▷ V11a

Il cubo di un binomio: $(A + B)^3$

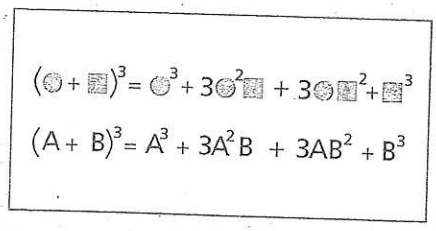
Per calcolare il cubo di un binomio possiamo moltiplicare il binomio per il suo quadrato:

$$(A + B)^3 = (A + B)^2(A + B) = (A^2 + 2AB + B^2)(A + B) =$$
$$= A^3 + A^2B + 2A^2B + 2AB^2 + AB^2 + B^3 =$$
$$= A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3.$$

REGOLA

Cubo di un binomio

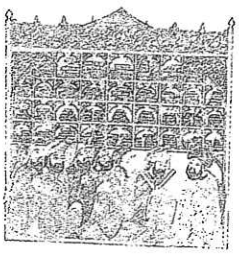
Il cubo di un binomio è un quadrinomio che ha come termini il cubo del primo termine, il triplo del quadrato del primo termine per il secondo, il triplo del primo termine per il quadrato del secondo, il cubo del secondo termine.



ESPLORAZIONE

Il padre dei polinomi

Nel sito: ▷ La scheda

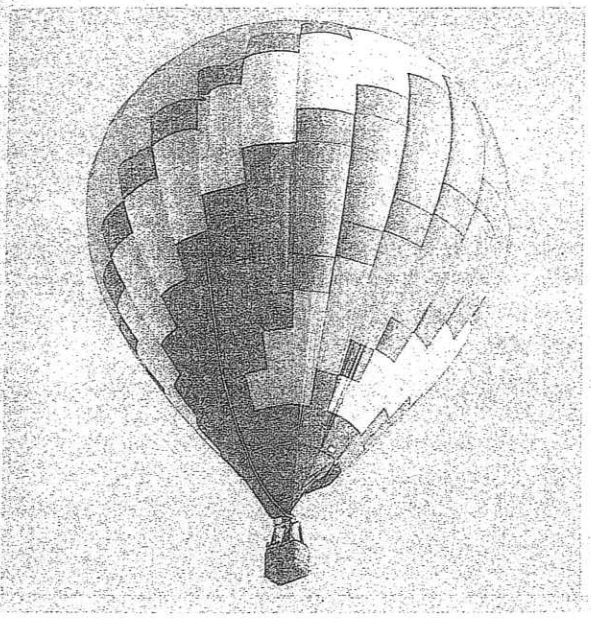


ESEMPIO

$$(2x^2 - y^2)^3 = (2x^2)^3 + 3(2x^2)^2(-y^2) + 3(2x^2)(-y^2)^2 + (-y^2)^3 =$$
$$= 8x^6 - 12x^4y^2 + 6x^2y^4 - y^6.$$

CAPITOLO 6

Le equazioni e le disequazioni lineari



Ad alta quota!
Non sempre un'equilibrata uguaglianza è una condizione desiderabile. Nel mondo fisico, solo le disuguaglianze possono produrre movimento ed energia: dislivelli, variazioni, tensioni, spinte verso il basso e controspinte verso l'alto…

…fino a che quota può volare una mongolfiera?

Nel sito: ▷ La risposta

1. Le equazioni

Che cos'è un'equazione

Consideriamo l'uguaglianza $2 + 3x = 5x$.
Si può dimostrare che esiste un solo valore che, sostituito a x, la rende vera. Questo valore è il numero 1: infatti $2 + 3 \cdot 1 = 5 \cdot 1$.
In generale, data un'uguaglianza fra due espressioni in cui compaiono delle variabili, ci si può chiedere per quali valori delle variabili essa è vera.

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▷ V21a

DEFINIZIONE

Equazione

Un'equazione è un'uguaglianza dove compaiono espressioni letterali per le quali si cercano i valori da attribuire a una o più lettere che rendono vera l'uguaglianza.

$2 \cdot x + 1 = 3 \cdot x - 2$

$2 \cdot 3 + 1 = 3 \cdot 3 - 2$

VERA per $x = 3$

Equazione deriva da *aequare*, che in latino significa «rendere uguale».

L'espressione a sinistra del segno di uguaglianza è il **primo membro** dell'equazione, l'espressione a destra è il **secondo membro**.
Le lettere per le quali si cercano i valori che rendono vera l'uguaglianza, sono dette **incognite** dell'equazione.

incognita

$$\underbrace{2x + 1}_{\text{primo membro}} = \underbrace{3x - 2}_{\text{secondo membro}}$$

In questo capitolo ci occuperemo di equazioni con una sola incognita.

ESEMPIO $2 - 3y = 5$ è un'equazione nell'incognita y;
$x + 3y = 7$ è un'equazione in due incognite, x e y.

Le soluzioni di un'equazione

I valori che rendono vera l'uguaglianza si chiamano **soluzioni** o **radici** dell'equazione. Si può anche dire che tali valori «verificano» (o anche «soddisfano») l'equazione.

ESEMPIO L'equazione $y - 9 = 1$ ha per soluzione 10, perché $10 - 9 = 1$.

Diciamo che la soluzione è $y = 10$.

Risolvere un'equazione significa determinare **tutte** le sue soluzioni, cioè tutti i valori che verificano l'uguaglianza. Tali valori costituiscono l'**insieme delle soluzioni** dell'equazione.

A volte indicheremo con S l'insieme delle soluzioni. Nell'esempio, $S = \{2, -2\}$.

ESEMPIO L'equazione $x^2 = 4$ ha due soluzioni: $x = 2$ e $x = -2$.

Infatti, $(2)^2 = 4$ e $(-2)^2 = 4$.

Un'equazione può avere soluzione in un insieme numerico, ma non averla in un insieme più ristretto.

Quando non daremo indicazioni diverse, cercheremo le soluzioni di un'equazione nell'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$.

ESEMPIO L'equazione $2x - 1 = 0$ ha soluzione nell'insieme $\mathbb{Q}$, ma non ha soluzione nell'insieme $\mathbb{N}$. Infatti la soluzione dell'equazione, $x = \frac{1}{2}$, è un numero razionale, non un numero naturale.

I diversi tipi di equazioni

In un'equazione possono comparire delle frazioni. L'equazione è:

- **intera** se l'incognita è presente soltanto nei numeratori. Per esempio:

$$\frac{x}{2} = 1 + 7x;$$

- **fratta** se l'incognita compare anche in uno o più denominatori.

Per esempio: $\frac{1}{x-3} = \frac{x}{4} - 1$.

Considerando le **lettere**, un'equazione è:

- **numerica** se oltre all'incognita contiene solo numeri; per esempio:

$$2x - \frac{3}{2} = \frac{1}{3x};$$

- **letterale** se oltre all'incognita contiene altre lettere che indicano coefficienti; per esempio, è letterale l'equazione nell'incognita x:

$$(1 - 2a)x = 3a + \frac{1}{4}.$$

Considerando le **soluzioni**, un'equazione è:

- **determinata** se ha un numero finito di soluzioni; per esempio: $x + 5 = 8$;
- **indeterminata** se ha infinite soluzioni; per esempio: $x + x = 2x$;
- **impossibile** se non ha soluzioni; per esempio: $x + 1 = x$.

D
- $x + 5 = 8$ ha per soluzione 3.
- Per l'equazione $x + x = 2x$ l'insieme delle soluzioni è: $S = \mathbb{R}$, cioè l'uguaglianza è vera per ogni valore reale di x. In simboli: $x + x = 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
- $x + 1 = x$ non ha soluzioni, perché la somma fra un numero e 1 non può essere il numero stesso.

La forma normale di un'equazione e il suo grado

Consideriamo il polinomio $P = 3x^2 - 2x + 5$, ridotto in forma normale, ovvero nella forma in cui non compaiono monomi simili fra loro.

Se poniamo $P = 0$, otteniamo un'equazione scritta in **forma normale** (o **forma canonica**):

$$3x^2 - 2x + 5 = 0.$$

Il termine senza l'incognita si chiama **termine noto**; nell'esempio il termine noto è $+5$.

Il **grado** dell'equazione è il grado del polinomio ridotto, ossia il massimo esponente con cui l'incognita compare nell'equazione in forma normale: l'equazione sopra considerata è di secondo grado.

In questo capitolo ci occuperemo soltanto della risoluzione di equazioni di primo grado. Esse vengono anche dette **equazioni lineari**.

ESEMPIO

$3x - 6 = 0$ è un'equazione di primo grado.

2. I princìpi di equivalenza

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▷ V21b

Le equazioni equivalenti

Consideriamo le equazioni $4x - 2 = 10$ e $4x = 12$.
Entrambe hanno come unica soluzione $x = 3$. Diciamo che le due equazioni sono *equivalenti*.

DEFINIZIONE

Equazioni equivalenti

Due equazioni contenenti la stessa incognita si dicono equivalenti se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

D Le equazioni

$x - 1 = 4$

e

$2x - 3 = -1$

non sono equivalenti, perché la soluzione della prima equazione è $x = 5$ e la soluzione della seconda è $x = 1$.

Indicheremo il passaggio da un'equazione a una equivalente con una freccia. Per esempio:

$$4x - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad 4x = 2.$$

Per risolvere un'equazione cercheremo di trasformarla in equazioni equivalenti, via via più semplici, fino a giungere a un'equazione in cui sia immediato trovare l'insieme delle soluzioni.
Le regole di trasformazione di un'equazione in altre equazioni a essa equivalenti sono stabilite da due princìpi, chiamati **princìpi di equivalenza**.

Il primo principio di equivalenza

Il primo principio di equivalenza si basa sulla prima legge di monotonia.

PRINCIPIO

Primo principio di equivalenza

Data un'equazione, se si aggiunge ai due membri uno stesso numero o una stessa espressione, si ottiene un'equazione equivalente.

I membro = II membro

equivalente a

I membro + ● = II membro + ●

ESEMPIO Consideriamo l'equazione $2x = 6$ che ha come soluzione $x = 3$.
Aggiungiamo a entrambi i membri 5 e otteniamo $2x + 5 = 6 + 5$, ossia $2x + 5 = 11$. La soluzione di questa equazione è $x = 3$, quindi è equivalente a quella data.

Osservazione. Quando si aggiunge un'espressione contenente l'incognita bisogna fare attenzione!

Per esempio, se aggiungiamo a entrambi i membri dell'equazione precedente, $2x = 6$, la frazione algebrica $\frac{1}{x-3}$, otteniamo: $2x + \frac{1}{x-3} = 6 + \frac{1}{x-3}$. La soluzione di quest'ultima equazione non può essere $x = 3$, perché per tale valore dell'incognita la frazione $\frac{1}{x-3}$ perde significato. L'equazione ottenuta *non è* quindi *equivalente* a quella data.

Per **campo di esistenza** di un'equazione intendiamo l'insieme dei valori che si possono attribuire all'incognita per cui hanno significato entrambi i membri dell'equazione.

In generale, **il primo principio può essere applicato solo se le espressioni che si aggiungono non restringono il campo di esistenza dell'equazione.**

Le applicazioni del primo principio

Dal primo principio derivano due regole pratiche utili nella risoluzione delle equazioni.

ESEMPIO Risolviamo l'equazione $7x - 2 = 6x + 1$.

Per eliminare il termine $+ 6x$ dal secondo membro, aggiungiamo a entrambi i membri il termine $- 6x$:

$$7x - 2 \underline{- 6x} = 6x + 1 \underline{- 6x} \quad \rightarrow \quad 7x - 2 - 6x = +1.$$

Poiché applichiamo il primo principio, l'equazione ottenuta è equivalente a quella iniziale.

Svolgiamo i calcoli al primo membro e otteniamo l'equazione:

$$x - 2 = 1.$$

Per eliminare -2 dal primo membro, aggiungiamo ai due membri $+2$:

$$x - 2 \underline{\underline{+2}} = 1 \underline{\underline{+2}} \quad \rightarrow \quad x = 1 + 2.$$

Otteniamo l'equazione:

$$x = 3.$$

Poiché le equazioni $7x - 2 = 6x + 1$ e $x = 3$ sono equivalenti, il valore 3, soluzione immediata della seconda equazione, è anche soluzione della prima.

D Per il primo principio anche questa equazione è equivalente alle precedenti.

Si può rendere più rapido il procedimento notando che, quando si elimina da un membro un termine, grazie al primo principio di equivalenza, esso ricompare nell'altro con il segno cambiato. Si può quindi formulare la **regola del trasporto**:

data un'equazione, se ne ottiene una equivalente se si trasporta un termine da un membro all'altro, cambiandolo di segno.

ESEMPIO $x + 2 = 5 \quad \rightarrow \quad x = 5 - 2 \quad \rightarrow \quad x = 3.$

D L'origine del termine algebra
Che cosa significa «algebra»? Il termine deriva da *al-jabr*, che il matematico arabo al-Khuwarizmi (IX sec. d.C.) utilizzava per indicare il procedimento che abbiamo chiamato «regola del trasporto». In seguito il termine venne usato in senso più ampio, come «scienza delle equazioni», per indicare i metodi di calcolo e le regole utili per risolverle.

Con considerazioni analoghe si giunge alla **regola di cancellazione**:

termini uguali presenti in entrambi i membri di un'equazione possono essere soppressi, ottenendo un'equazione equivalente.

ESEMPIO $x + 9 = 4 + 9 \quad \rightarrow \quad x + \cancel{9} = 4 + \cancel{9} \quad \rightarrow \quad x = 4.$

Il secondo principio di equivalenza

PRINCIPIO

Secondo principio di equivalenza

Data un'equazione, si ottiene un'equazione equivalente se si moltiplicano o si dividono i due membri per uno stesso numero, o espressione, *diverso da* 0.

I membro = II membro

equivalente a

● ∘ I membro = ● ∘ II membro

D Il secondo principio di equivalenza si basa sulla seconda legge di monotonia delle uguaglianze.

ESEMPIO L'equazione $\frac{2}{3}x = 10$ ha soluzione $x = 15$, infatti $\frac{2}{3} \cdot 15 = 10$.

Moltiplichiamo i due membri per 3 e otteniamo l'equazione:

$$3 \cdot \frac{2}{3}x = 3 \cdot 10, \qquad \text{ossia} \qquad 2x = 30.$$

La soluzione di questa equazione è 15, quindi è equivalente a quella data.

Le applicazioni del secondo principio

REGOLA

La divisione per un fattore comune diverso da 0

Se tutti i termini di un'equazione hanno un fattore numerico comune (*diverso da* 0), si ottiene un'equazione equivalente dividendo tutti i termini per quel fattore.

$$3x + 3 \cdot 5 = 3 \cdot 7$$

equivalente a

$$\cancel{3}x + \cancel{3} \cdot 5 = \cancel{3} \cdot 7$$

Applicando il secondo principio, è possibile ricavare due regole utili per risolvere equazioni.

ESEMPIO Nell'equazione $3x + 9 = 24 - 3$ i termini $3x$, 9, 24 e 3 sono tutti divisibili per 3; pertanto possiamo dividere ciascun termine per 3, ottenendo l'equazione $x + 3 = 8 - 1$, equivalente alla data.

Altro esempio: nell'equazione

$$2x + 4 = 0$$

possiamo dividere per 2 e otteniamo

$$x + 2 = 0,$$

perché $0 : 2 = 0$.

Vale la **regola del cambiamento di segno**:

cambiando segno a tutti i termini di un'equazione, si ottiene un'equazione equivalente.

Cambiare il segno a tutti i termini dell'equazione equivale a *moltiplicare i due membri dell'equazione per* -1!

ESEMPIO $-5x + 8 = -23 \rightarrow 5x - 8 = 23$; $\quad -x = 5 \rightarrow x = -5$.

Osservazione. Il secondo principio è particolarmente utile per eliminare, passando a un'equazione equivalente, i denominatori nei coefficienti di un'equazione.

Per esempio:

$$\frac{x}{2} = x + \frac{5}{3} \rightarrow$$

$$\frac{3x}{6} = \frac{6x + 10}{6} \rightarrow$$

$$\frac{3x}{\cancel{6}} \cdot \cancel{6} = \frac{6x + 10}{\cancel{6}} \cdot \cancel{6} \rightarrow$$

$$3x = 6x + 10.$$

3. Le equazioni numeriche intere

Le **equazioni numeriche intere** sono le equazioni a coefficienti numerici in cui l'incognita non è presente in alcun denominatore.

ESEMPIO $\frac{1}{2}x - 3 = \frac{1}{5}$.

BRAVI SI DIVENTA

Videolezione ▷ V21c

La risoluzione di un'equazione numerica intera

Applicando i princìpi di equivalenza, è sempre possibile trasformare un'equazione di primo grado intera in un'equazione equivalente scritta nella forma:

$$ax = b,$$

ossia tale che il primo membro contenga il termine con l'incognita e il secondo membro contenga il termine noto. Da essa si ottiene la soluzione dell'equazione, se esiste, mediante il secondo principio di equivalenza.

ESEMPIO Risolviamo l'equazione:

$$4x - 9 + (x - 1)(x + 1) = (x - 3)^2 + 2x + 5.$$

Eseguiamo il prodotto al primo membro e svolgiamo il quadrato del binomio al secondo membro:

$$4x - 9 + \cancel{x^2} - 1 = \cancel{x^2} - 6x + 9 + 2x + 5.$$

Cancelliamo i termini uguali presenti in entrambi i membri e riduciamo i termini simili:

$$4x - 9 - 1 = -6x + 9 + 2x + 5 \quad \rightarrow \quad 4x - 10 = -4x + 14.$$

Applichiamo la regola di cancellazione.

Trasportiamo nel primo membro i termini con l'incognita e nel secondo membro i termini noti, ricordando di cambiare segno a ogni termine che viene trasportato da una parte all'altra dell'uguale:

$$4x + 4x = 14 + 10 \quad \rightarrow \quad 8x = 24.$$

Applichiamo la regola del trasporto.

Dividiamo i due membri per 8, cioè per il coefficiente di x:

$$\frac{8x}{8} = \frac{24}{8} \quad \rightarrow \quad x = 3, \text{ che è la soluzione.}$$

Sommiamo i termini simili.

Applichiamo il secondo principio di equivalenza.

Le equazioni determinate, indeterminate, impossibili

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▷ V21d

Data un'equazione numerica nella forma:

$$ax = b,$$

a seconda dei valori assunti da a e da b, l'equazione può essere determinata, indeterminata, impossibile.

Equazione determinata
Se $a \neq 0$, dividiamo entrambi i membri per a e otteniamo:

$$x = \frac{b}{a}.$$

Poiché il risultato della divisione è unico, l'equazione ha **una** e **una sola soluzione**.

Equazione indeterminata
Se si verificano entrambe le condizioni $a = 0$ e $b = 0$, abbiamo $0x = 0$.

Sostituendo a x un qualunque numero, l'uguaglianza è verificata. Infatti, moltiplicando qualsiasi numero per 0 si ottiene 0. Poiché l'equazione $0x = 0$ ha **infinite soluzioni**, l'equazione è **indeterminata** e l'insieme delle soluzioni è $\mathbb{R}$.

ESEMPIO Risolviamo l'equazione:

$$4x - 12 - 3x = 5 + x - 17 \rightarrow 4x - 3x - x = 12 + 5 - 17 \rightarrow 0x = 0.$$

L'equazione è indeterminata.

Equazione impossibile

Se si verificano le due condizioni $a = 0$ e $b \neq 0$, abbiamo $0x = b$, con $b \neq 0$.

Questa equazione non ha soluzioni, poiché non esiste un numero che, moltiplicato per 0, dia come risultato un numero diverso da 0.

Poiché **non ha soluzioni**, l'equazione è **impossibile** e l'insieme delle soluzioni è l'insieme vuoto: $S = \varnothing$.

ESEMPIO

Risolviamo la seguente equazione:

$$2(x-1) - 2x = 0 \rightarrow 2x - 2 - 2x = 0 \rightarrow 0x - 2 = 0 \rightarrow 0x = 2.$$

Poiché nessun numero, moltiplicato per 0, può dare 2, l'equazione è impossibile.

D L'equazione $0x = 2$ è impossibile, mentre l'equazione

$$2x = 0$$

è determinata, perché il coefficiente di x è diverso da zero e la soluzione è $x = 0$.

In sintesi:

$ax = b$
- $a \neq 0$: $x = \frac{b}{a}$ **equazione determinata**
- $a = 0$
  - $b = 0$ **equazione indeterminata**
  - $b \neq 0$ **equazione impossibile**

PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI

Il principe e il messaggero

Nel sito: ▷ Scheda di lavoro

«Partito per esplorare il regno di mio padre, percorrevo 40 leghe al giorno. Già all'inizio del secondo giorno di viaggio mi preoccupai di poter comunicare con i miei cari. Fra i cavalieri scelsi il migliore, Alessandro, e gli chiesi di fare la spola tra la nostra posizione e il castello. Ogni giorno Alessandro percorreva 80 leghe... Oggi partirà di nuovo per il castello. Ho calcolato che lo potrei rivedere solo fra più di trent'anni.» Quando il principe pronuncia questa frase, quanti giorni sono trascorsi dalla partenza?

(Liberamente ispirato al racconto *I sette messaggeri*, Dino Buzzati, *Sessanta racconti*, Mondadori, 2001)

GIORGIA: «Forse la risposta ce la può dare la legge matematica che regola i successivi incontri fra il principe e il messaggero».

MATTEO: «Potremmo rappresentare la situazione con una tabella...».

▷ Metti in pratica l'idea di Matteo e utilizza anche una rappresentazione grafica. Se un incontro avviene a una certa distanza dal castello, a quale distanza avviene l'incontro successivo?

PROPRIETÀ

Moltiplicazione (divisione) per un numero

Moltiplicando (o dividendo) entrambi i membri di una disuguaglianza per uno stesso numero:

- se è positivo, si ottiene una disuguaglianza dello stesso verso;
- se è negativo, si ottiene una disuguaglianza di verso contrario.

ESEMPIO

Data la disuguaglianza: $2 < 5$,

moltiplichiamo per $+3$: $2 \cdot 3 < 5 \cdot 3 \quad \rightarrow \quad 6 < 15$;

moltiplichiamo per -4: $2 \cdot (-4) > 5 \cdot (-4) \quad \rightarrow \quad -8 > -20$.

D Dobbiamo cambiare il verso della disuguaglianza.

Caso particolare. Data la disuguaglianza $a < b$, se moltiplichiamo entrambi i membri per -1, otteniamo: $-a > -b$. Per esempio:

$$9 > 4 \quad \rightarrow \quad -9 < -4.$$

Possiamo quindi cambiare i segni nei due membri di una disuguaglianza, ma dobbiamo anche cambiare il verso.

PROPRIETÀ

Proprietà dei reciproci di numeri concordi

Dati due numeri concordi e diversi da zero, la disuguaglianza fra i loro reciproci ha senso contrario rispetto a quella fra i numeri stessi.

D La proprietà dei reciproci non è vera se i numeri sono **discordi**. Per esempio:

$$3 > -2 \quad \text{e} \quad \frac{1}{3} > -\frac{1}{2}.$$

ESEMPIO

$$2 < 3 \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} > \frac{1}{3}; \qquad -2 < -1 \quad \text{e} \quad -\frac{1}{2} > -1.$$

8. Le disequazioni di primo grado

Consideriamo ora una disuguaglianza in cui compare una variabile, per esempio:

$$x - 3 < 5.$$

Procedendo per tentativi, attribuiamo alla lettera x alcuni valori e verifichiamo se la disuguaglianza che otteniamo è vera o falsa:

$x = 1$: $1 - 3 < 5$ vera, $x = 5$: $5 - 3 < 5$ vera,

$x = 8$: $8 - 3 < 5$ falsa, $x = 9$: $9 - 3 < 5$ falsa,

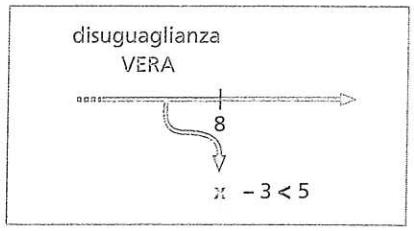
...

Come si può intuire, la disuguaglianza è vera per tutti i valori di x minori di 8, mentre è falsa per i valori di x maggiori o uguali a 8.

DEFINIZIONE

Disequazione

Una disequazione è una disuguaglianza fra due espressioni letterali per la quale si vuole stabilire quali valori di una o più lettere rendono la disuguaglianza vera.



Le lettere per le quali si cercano i valori che rendono vera la disuguaglianza sono le **incognite** della disequazione.
Tutti i valori che soddisfano una disequazione costituiscono l'**insieme delle soluzioni**. Di solito, cercheremo le soluzioni nell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali.

Per esempio, nella disequazione $x - 3 < 5$ l'insieme delle soluzioni è $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 8\}$, che per brevità indicheremo con: $x < 8$.

In questo capitolo ci occupiamo soltanto della risoluzione di **disequazioni di primo grado**, dette anche **disequazioni lineari**, a una incognita.

I simboli usati

Nelle disequazioni può comparire uno di questi simboli:

$<$ minore; $\leq$ minore o uguale;

$>$ maggiore; $\geq$ maggiore o uguale.

I simboli $\leq$ e $\geq$ indicano condizioni meno restrittive.

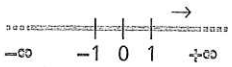
Per esempio, la disequazione $x + 4 \leq 6$ è verificata da tutti i numeri minori di 2 e anche dal numero 2, mentre la disequazione $x + 4 < 6$ è verificata soltanto da tutti i numeri minori di 2. In quest'ultimo caso il numero 2 non è soluzione della disequazione.

La rappresentazione delle soluzioni

Per rappresentare graficamente le soluzioni di una disequazione, possiamo utilizzare la retta orientata, i cui punti corrispondono ai numeri reali.

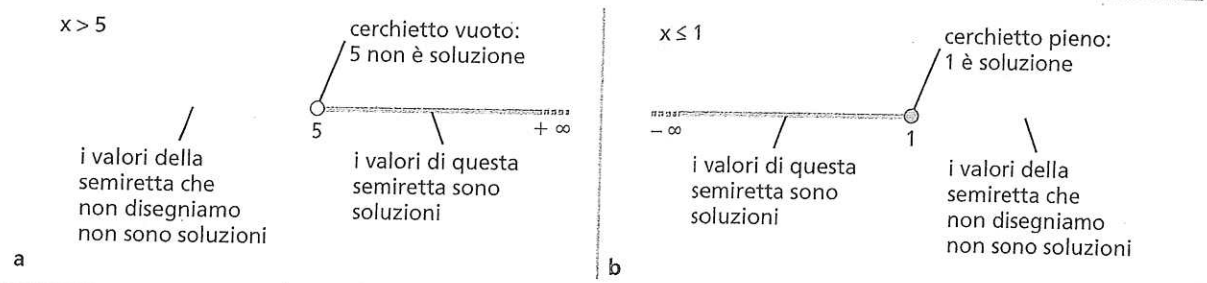
Sulla retta orientata faremo uso delle seguenti convenzioni:

- una *linea continua* rappresenta l'insieme delle soluzioni della disequazione;
- *non disegniamo* le parti della retta che non corrispondono a soluzioni;
- un *cerchietto pieno* su un punto indica che il valore corrispondente è una soluzione;
- un *cerchietto vuoto* su un punto indica che il valore corrispondente **non** è una soluzione.



△ **Figura 2** A ogni punto della retta corrisponde un numero reale e viceversa. I simboli $-\infty$ (meno infinito) e $+\infty$ (più infinito) non corrispondono ad alcun numero reale. Essi indicano soltanto che la retta è illimitata da entrambe le parti.

ESEMPIO Rappresentiamo graficamente le soluzioni $x > 5$ e $x \leq 1$.



△ **Figura 3**

Spesso le soluzioni sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ costituiti da tutti i valori che precedono un certo numero, o da quelli che lo seguono, o dai valori compresi fra due numeri. Insiemi di questo tipo vengono detti **intervalli**. Parleremo quindi di **intervallo delle soluzioni**.

L'intervallo può essere indicato dalla coppia degli estremi, ordinati dal più piccolo al più grande, separati da un punto e virgola e racchiusi fra parentesi quadre. Per esempio, l'intervallo comprendente gli estremi a e b, con $a < b$, si indica $[a; b]$.

L'orientamento delle parentesi indica se gli estremi sono inclusi o esclusi:

$[a; b]$ estremi inclusi;

$]a; b[$ estremi esclusi;

$[a; b[$ estremo di sinistra incluso, estremo di destra escluso;

$]a; b]$ estremo di sinistra escluso, estremo di destra incluso.

▷ $-\infty$ e $+\infty$ non sono numeri, quindi, come estremi di intervalli, vanno **sempre esclusi**. L'intervallo $]-\infty; +\infty[$ è l'insieme $\mathbb{R}$.

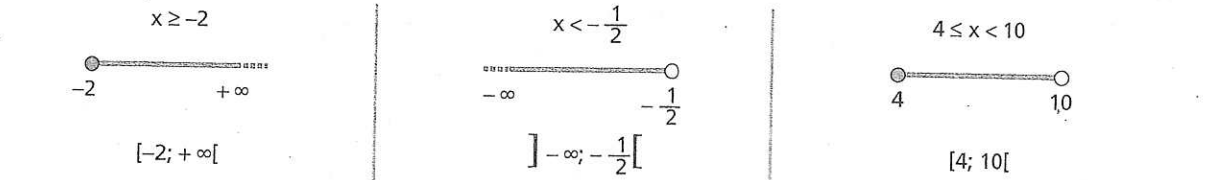
ESEMPIO L'intervallo $x > 5$ si può rappresentare così:

$]5; +\infty[$.

Infatti, sia 5 sia $+\infty$ sono esclusi.

Consideriamo, in ognuno degli esempi della figura 4, i tre modi di rappresentare le soluzioni della rispettiva disequazione.

▽ **Figura 4**



a. -2 è compreso fra le soluzioni: sulla retta è rappresentato da un cerchietto pieno; la parentesi quadra è rivolta verso -2.

b. $-\frac{1}{2}$ non è la soluzione: sulla retta è rappresentato da un cerchietto vuoto; la parentesi è rivolta dalla parte opposta a $-\frac{1}{2}$.

c. La scrittura $4 \leq x < 10$ significa che devono essere contemporaneamente vere le due condizioni $4 \leq x$ e $x < 10$. Le soluzioni sono comprese fra 4 (incluso) e 10 (escluso).

Un intervallo è **aperto** se non comprende i suoi estremi, è **chiuso** se li comprende.

ESEMPIO

$\left[1; \frac{3}{2}\right]$ è un intervallo chiuso; $]-1; 0[$ è un intervallo aperto;

$\left[\frac{1}{3}; 5\right[$ è un intervallo chiuso a sinistra, aperto a destra;

$]-8; 0]$ è un intervallo aperto a sinistra, chiuso a destra.

I vari tipi di disequazioni

Buona parte della terminologia e delle definizioni usate per le disequazioni è analoga a quella usata per le equazioni. Per esempio, una disequazione è *intera* se l'incognita compare soltanto al numeratore, è *fratta* se compare anche al denominatore.

ESEMPIO

Disequazione numerica intera: $2x > \frac{3+x}{2}$.

Disequazione letterale intera: $\frac{x}{b} - \frac{3}{a} > \frac{2}{a}$.

Disequazione numerica frazionaria, o fratta: $\frac{5x-3}{1-x} > 0$.

Disequazione letterale fratta: $\frac{1}{x} > a$.

Le disequazioni equivalenti

Per risolvere le disequazioni utilizziamo concetti e princìpi analoghi a quelli già visti per le equazioni, tenendo conto delle proprietà delle disuguaglianze fra numeri che abbiamo esaminato nel paragrafo 7.

DEFINIZIONE

Disequazioni equivalenti

Due disequazioni sono equivalenti se hanno lo stesso insieme di soluzioni.

ESEMPIO

La disequazione $x + 1 < 3$ è equivalente alla disequazione $x < 2$.

Infatti sono entrambe soddisfatte per tutti i valori di x minori di 2.

Per risolvere le disequazioni, si usano regole che derivano dalle proprietà delle disuguaglianze numeriche.

PRINCIPIO

Primo principio di equivalenza

Data una disequazione, si ottiene una disequazione a essa equivalente aggiungendo a entrambi i membri uno stesso numero o espressione.

ESEMPIO

La disequazione

$$2x - 3 > x + 5$$

è equivalente alla disequazione

$$x - 3 > 5,$$

ottenuta aggiungendo $-x$ a entrambi i membri.

▷ Nell'esempio, possiamo anche dire che il termine x è stato *trasportato* al primo membro, con il segno cambiato.

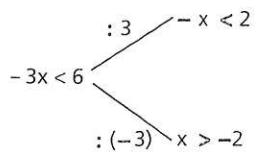
In generale, **un termine può essere trasportato da un membro all'altro di una disequazione, cambiandolo di segno.**

PRINCIPIO

Secondo principio di equivalenza

Per trasformare una disequazione in una equivalente si può:

- moltiplicare (o dividere) entrambi i membri per uno stesso numero positivo;
- moltiplicare (o dividere) entrambi i membri per un numero negativo e cambiare il verso della disequazione.



▲ Figura 5 La disequazione $-3x < 6$ è equivalente sia alla disequazione $-x < 2$, ottenuta dividendo i due membri per 3, sia alla disequazione $x > -2$, ottenuta dividendo i due membri per -3 e cambiando il verso della disequazione.

In particolare, **se si cambia il segno di tutti i termini di una disequazione e si inverte il suo verso, si ottiene una disequazione equivalente.**

Questa operazione corrisponde alla moltiplicazione per -1 dei membri della disequazione. Per esempio, $-x < 2$ è equivalente a $x > -2$.

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▷ V24a

9. Le disequazioni numeriche intere

La strategia risolutiva delle disequazioni intere è del tutto simile a quella utilizzata per le equazioni.

ESEMPIO

1. Risolviamo la disequazione:

$$\frac{1}{3}x - 4 + 2x > \frac{3 + x}{2}.$$

Eliminiamo i denominatori, moltiplicando entrambi i membri per 6 (il m.c.m. dei denominatori); dato che moltiplichiamo per un numero positivo, il verso della disequazione non cambia:

$$2x - 24 + 12x > 9 + 3x.$$

Trasportiamo i termini con l'incognita al primo membro, quelli noti al secondo membro e poi sommiamo i termini simili:

$$11x > 33.$$

Dividiamo i due membri per 11, cioè per il coefficiente di x:

$$x > 3.$$

L'intervallo delle soluzioni è $]3; +\infty[$.

2. Risolviamo la seguente disequazione:

$$\frac{3}{2}x - 4 < \frac{(x-2)}{2} + \frac{(5x+3)}{5}.$$

$$15x - 40 < 5x - 10 + 10x + 6$$

$$0 \cdot x < 36.$$

Qualunque valore sostituiamo a x, il prodotto $0 \cdot x$ vale sempre 0. Poiché $0 < 36$ è vera, la disequazione risulta **sempre verificata**. In tal caso l'intervallo delle soluzioni è tutto $\mathbb{R}$; come soluzione, scriviamo: $\forall x \in \mathbb{R}$.

3. Risolviamo la disequazione:

$$3x - 2 - x > 4 + 2x + 1.$$

$$2x - 2 > 5 + 2x \quad \rightarrow \quad 2x - 2x > 5 + 2$$

$$0 \cdot x > 7.$$

Qualunque valore sostituiamo a x, otteniamo sempre $0 > 7$, che è una disuguaglianza falsa, quindi la disequazione non risulta **mai verificata**. L'intervallo delle soluzioni è l'insieme vuoto: la disequazione è **impossibile**.

La palestra

Tre palestre offrono servizi simili, ma ciascuna applica tariffe calcolate in modo diverso e promozioni differenti. Troviamo a quale palestra conviene iscriversi, a seconda della durata voluta per l'abbonamento.

Nel sito: ▷ Il problema

PROBLEMI, RAGIONAMENTI, DEDUZIONI

Pensieri e parole

Nel sito: ▷ Scheda di lavoro

Le società RapidMail e VeloPost offrono il servizio di recapito telegrammi all'estero a due diverse tariffe:
Tariffa RM: 0,3 euro a parola e in più costo fisso di 7 euro;
Tariffa VP: 0,8 euro a parola.

ALESSANDRO: «Davvero passi le vacanze in Francia? Se ti mando il telegramma TVTB ALESSANDRO, con VP spendo davvero poco».

LAURA: «Ma se vuoi essere romantico e mi mandi venti parole, ti conviene RM!».

▷ Qual è il numero di parole oltre il quale conviene la tariffa RM?

× 2ª (PASS × 3ª)

Segmenti, lunghezze e misure
Scriveremo, per brevità, frasi del tipo:

«Il segmento AB supera di 3 cm il segmento BK».

In realtà, per essere più precisi, dovremmo scrivere:

«La lunghezza del segmento AB supera di 3 cm la lunghezza del segmento BK».

Con AB indicheremo sia un segmento sia la sua lunghezza, mentre con $\overline{AB}$ indicheremo la misura della sua lunghezza.
Per esempio:

$AB = 5$ cm

indica che la lunghezza di AB è 5 rispetto al centimetro;

$\overline{AB} = 5$

indica che 5 è la misura della lunghezza di AB.

Equazioni e problemi geometrici

Problema
La somma delle lunghezze di due segmenti AB e CD è 41 cm. Il segmento AB supera di 8 cm la metà di CD. Quanto misurano i due segmenti?

Soluzione
Di solito, nei problemi geometrici è consigliabile disegnare una figura.

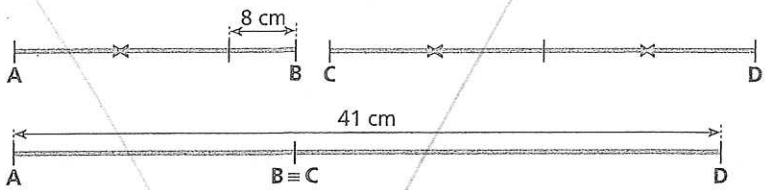


Figura 1

1. Le **richieste** del problema: le misure delle lunghezze di AB e di CD.
2. Scegliamo l'**incognita**: $x = \overline{AB}$.
3. Scriviamo le **relazioni** fornite dal problema:

$$\overline{AB} + \overline{CD} = 41 \quad \text{e} \quad \overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{CD} + 8.$$

Sostituiamo ad $\overline{AB}$ l'incognita x: $x + \overline{CD} = 41$ e $x = \frac{1}{2}\overline{CD} + 8$.

Determiniamo $\overline{CD}$ in funzione di x dalla prima relazione: $\overline{CD} = 41 - x$.

4. Sostituiamo l'espressione trovata nella seconda relazione, ottenendo l'**equazione risolvente**: $x = \frac{1}{2}(41 - x) + 8$.

5. Scriviamo le **condizioni** per cui è accettabile la soluzione.
Poiché x è la misura della lunghezza di un segmento, si deve avere $x > 0$.
6. Risolviamo l'equazione e controlliamo se la soluzione è accettabile:

$$x = \frac{41}{2} - \frac{x}{2} + 8 \quad \rightarrow \quad x = \frac{57}{3}, \qquad \text{ossia } x = 19.$$

7. La soluzione è accettabile, poiché $x > 0$.
8. Scriviamo la risposta al problema: $\overline{AB} = 19$, $\overline{CD} = 41 - 19 = 22$.

Facendo il m.c.m si ottiene:

$2x = 41 - x + 16 \rightarrow$
$\rightarrow 3x = 57.$

Possiamo scrivere:

$AB = 19$ cm,
$CD = 22$ cm.

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▷ V21e

5. Le equazioni numeriche fratte

Un'equazione è **fratta** se l'incognita compare in almeno un denominatore. Un'equazione fratta è **numerica** se *tutti* i coefficienti sono numerici, è letterale se *almeno* un coefficiente contiene una o più lettere.

ESEMPIO $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1}$ e $3 + \frac{2x}{x+1} = 0$ sono equazioni numeriche fratte. L'equazione, nell'incognita x, $\frac{a}{x} + \frac{1}{a} = 1$ è letterale fratta.

L'equazione letterale nell'incognita x

$$\frac{1}{a}x + \frac{3x}{a-1} = \frac{x+1}{a+1}$$

è intera, perché nessun denominatore contiene x.

La risoluzione di un'equazione numerica fratta

Prima di risolvere un'equazione numerica fratta, dobbiamo determinare le condizioni di esistenza delle frazioni algebriche presenti.
Poi possiamo procedere alla risoluzione applicando i princìpi di equivalenza. La soluzione trovata sarà accettabile solo se rispetta le condizioni di esistenza.

Ci limitiamo a esaminare la soluzione delle equazioni numeriche fratte. Negli esercizi troverai anche esempi relativi alle equazioni letterali fratte.

ESEMPIO Risolviamo l'equazione:

$$\frac{x}{x-1} = \frac{1}{x-1}.$$

Le due frazioni algebriche hanno significato solo se $x - 1 \neq 0$, cioè se $x \neq 1$:

C.E.: $x \neq 1$.

Moltiplichiamo entrambi i membri per $x - 1$ e otteniamo la soluzione:

$$\frac{x}{x-1}(x-1) = \frac{1}{x-1}(x-1) \quad \rightarrow \quad x = 1.$$

È ora necessario il **controllo della soluzione**.

Poiché la soluzione $x = 1$ è incompatibile con la condizione $x \neq 1$, la soluzione non può essere accettata, quindi l'equazione è impossibile.

Applichiamo il secondo principio di equivalenza delle equazioni.

In sintesi, per risolvere un'equazione numerica fratta dobbiamo:

- determinare le **condizioni di esistenza** delle frazioni algebriche presenti;
- portare tutte le frazioni algebriche a **denominatore comune**;
- moltiplicare entrambi i membri dell'equazione per tale denominatore, in modo da ottenere un'**equazione intera**;
- calcolare le **soluzioni** dell'equazione intera;
- controllare che tali soluzioni siano **accettabili**, cioè che rispettino le C.E.: in caso affermativo, esse sono soluzioni dell'equazione fratta.

6. Le equazioni letterali

Le equazioni letterali presentano una o più lettere oltre all'incognita.

ESEMPIO L'equazione, nell'incognita x,

$$\frac{(a+1)x}{2a} = \frac{5a(b-3)}{6b} \quad \text{è letterale intera.}$$

L'equazione, nell'incognita x,

$$\frac{2a}{x-a} = \frac{x+1}{3},$$

è letterale ma non è intera, perché contiene l'incognita x al denominatore.

La risoluzione di un'equazione letterale intera

Nella soluzione delle equazioni letterali intere è necessario discutere per quali valori delle lettere presenti l'equazione è determinata, indeterminata o impossibile.

BRAVI SI DIVENTA
Videolezione ▷ V22a

RECUPERO
LE EQUAZIONI NUMERICHE FRATTE

1 **COMPLETA**

Risolvi la seguente equazione fratta:

$$\frac{2}{x^2-9}=\frac{4}{x^2-5x+6}-\frac{2}{x^2-4}.$$

$$\frac{2}{(x-\ldots)(x+\ldots)}=\frac{4}{(x-3)(x-\ldots)}-\frac{2}{(x-\ldots)(x+\ldots)}$$

Riscrivi l'equazione scomponendo i denominatori mediante i prodotti notevoli (differenza di quadrati e trinomio particolare).

C.E. $x \neq 3 \wedge x \neq -\ldots \wedge x \neq +\ldots \wedge x \neq -\ldots$

Poni le C.E.

m.c.m. $(x-3)(x+\ldots)(x-\ldots)(x+\ldots)$

Calcola il m.c.m.

$$\cancel{(x-3)(x+\ldots)(x-\ldots)(x+\ldots)}\,\frac{2(x-\ldots)(x+\ldots)}{\cancel{(x-3)(x+\ldots)(x-\ldots)(x+\ldots)}}=$$

Riduci le frazioni allo stesso denominatore e moltiplica per il m.c.m.

$$=\frac{4(x+\ldots)(x+\ldots)-2(x-3)(x+\ldots)}{\cancel{(x-3)(x+\ldots)(x-\ldots)(x+\ldots)}}\cdot\cancel{(x-3)(x+\ldots)(x-\ldots)(x+\ldots)}$$

$2(x^{\cdots}-\ldots)=4(x^{\cdots}+\ldots x+\ldots x+\ldots)-2(x^{\cdots}-\ldots)$

Riconosci i due prodotti notevoli ed esegui la moltiplicazione tra i due binomi.

$2x^{\cdots}-\ldots=4x^{\cdots}+\ldots x+\ldots x+\ldots-2x^{\cdots}+\ldots$

Esegui le moltiplicazioni.

$\cancel{2x^{\cdots}}-\cancel{4x^{\cdots}}-\ldots x-\ldots x+\cancel{2x^{\cdots}}=+\ldots+\ldots+\ldots$

Applica la regola del trasporto e somma i termini simili.

$-\ldots x=\ldots$

Dividi entrambi i membri per il coefficiente di x.

$$\frac{-\ldots x}{-\ldots}=\frac{\ldots}{-\ldots}\quad\rightarrow\quad x=-\frac{\ldots}{\ldots}$$

Ricava x.

Soluzione accettabile.

Confronta la soluzione con le C.E.

2 **PROVA TU**

Risolvi la seguente equazione fratta:

$$\frac{16x}{x^2-9}-\frac{8}{x-3}=\frac{5}{x+3}.$$

$$\frac{16x}{(x-\ldots)(x+\ldots)}-\frac{8}{x-3}=\frac{5}{x+3}$$

C.E.:

$x \neq +\ldots$

$x \neq -\ldots$

Copyright © 2010 Zanichelli editore SpA, Bologna [6821 der]
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

m.c.m. $(x-3)(x+3)$

$$\cancel{(x-\dots)(x+\dots)}\,\frac{16x-8(x+\dots)}{\cancel{(x-\dots)(x+\dots)}}=\frac{5(x-\dots)}{\cancel{(x+3)(x-\dots)}}\cdot\cancel{(x+3)(x-\dots)}$$

$$16x-8x-\dots=5x-\dots$$

$$16x-8x-5x=\dots-\dots$$

$$\frac{3x}{3}=\frac{\dots}{3}$$

$x=\dots$ soluzione non .....

Risolvi le seguenti equazioni fratte.

3 $\dfrac{2x+1}{x}=\dfrac{1}{2}$ $\left[x=-\dfrac{2}{3}\text{, accettabile}\right]$

4 $\dfrac{x+1}{x+2}-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{2}$ $[x=-8\text{, accettabile}]$

5 $\dfrac{2x-5}{2}=\dfrac{x^2-3x+1}{x-2}$ $\left[x=\dfrac{8}{3}\text{, accettabile}\right]$

6 $\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{x-2}{x-1}$ $\left[x=\dfrac{1}{2}\text{, accettabile}\right]$

7 $\dfrac{x-3}{x+1}=\dfrac{x+4}{x-2}$ $\left[x=\dfrac{1}{5}\text{, accettabile}\right]$

8 $\dfrac{2}{(x-1)^2}=\dfrac{1}{x-1}$ $[x=3\text{, accettabile}]$

9 $\dfrac{2x-1}{x+2}+\dfrac{1-x}{1+x}=\dfrac{x-3}{x+2}$ $[x=-2\text{, non accettabile}]$

10 $\dfrac{2x-1}{4x}=\dfrac{x-1}{2x+1}$ $\left[x=\dfrac{1}{4}\text{, accettabile}\right]$

11 $\dfrac{2x}{x^2-4}=\dfrac{1}{x+2}$ $[x=-2\text{, non accettabile}]$

Copyright © 2010 Zanichelli editore SpA, Bologna [6821 der]
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

RECUPERO
LE DISEQUAZIONI NUMERICHE INTERE

1 **COMPLETA**

Risolvi la seguente disequazione intera:

$$\frac{5}{3}x + \frac{(x-1)^2}{2} \leq \frac{(x+3)^2}{2} + \frac{x-4}{6}$$

$\frac{5}{3}x + \frac{x^2 \ldots + 1}{2} \leq \frac{x^2 \ldots + 9}{2} + \frac{x-4}{6}$ — Sviluppa i prodotti notevoli al numeratore.

m.c.m. $(3, \ldots, 6) = 6$ — Calcola il m.c.m. dei denominatori.

$10x + 3(x^2 \ldots + 1) \leq 3(x^2 \ldots + 9) + x - 4$ — Elimina i denominatori moltiplicando entrambi i membri per il m.c.m.

$10x + \cancel{3x^2} \ldots + 3 \leq \cancel{3x^2} \ldots + 27 + x - 4$ — Esegui le moltiplicazioni e applica la regola di cancellazione.

$10x \ldots\ldots - x \leq -3 + 27 - 4$ — Applica la regola del trasporto.

$\ldots x \leq 20 \rightarrow \ldots x \geq \ldots 20$ — Cambia segno ai due membri e verso alla disequazione.

$x \geq \ldots \frac{20}{\ldots} \rightarrow x \geq \ldots \frac{\ldots}{\ldots}$ — Ricava la soluzione.

2 **PROVA TU**

L'insieme delle soluzioni della disequazione $x \ldots -2$ si può rappresentare sulla retta come:

oppure come

$]-\infty; \ldots[$

3 **PROVA TU**

Risolvi la seguente disequazione intera:

$$3(x-2)^2 - 2 - 6x^2 > 3(1-x)(1+x) + 2x.$$

$3(x^2 - \ldots x + \ldots) - 2 - 6x^2 > 3(1 - x^{\cdots}) + 2x$

$3x^2 - \ldots x + \ldots - 2 - 6x^2 > 3 - 3x^{\cdots} + 2x$

$3x^2 - \ldots x - 6x^2 + 3x^{\cdots} - 2x > - \ldots + 2 + 3$

$- \ldots x > - \ldots$

$\ldots x < + \ldots$

$x < \frac{\ldots}{\ldots}$

$]-\ldots; \ldots[$.

Copyright © 2010 Zanichelli editore SpA, Bologna [6821 der]
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

Risolvi le seguenti disequazioni.

4 $5x + 11 < 2x + 2$ $[x < -3]$

5 $3 - x \geq 2(4x - 3)$ $[x \leq 1]$

6 $2(x - 2) + 3(x - 3) \geq 2$ $[x \geq 3]$

7 $(x + 3)^2 + 3 \leq x(x + 2)$ $[x \leq -3]$

8 $3 + (x + 2)(x - 3) \geq (x + 1)^2$ $\left[x \leq -\frac{4}{3}\right]$

9 $\frac{1}{4}x - 2 > x - 1$ $\left[x < -\frac{4}{3}\right]$

10 $\frac{2x - 1}{2} \geq \frac{x}{5}$ $\left[x \geq \frac{5}{8}\right]$

11 $\frac{x + 4}{2} + \frac{1 - 2x}{3} \geq \frac{x + 3}{2}$ $\left[x \leq \frac{5}{4}\right]$

12 $(x + 1)^2 - x < x(x + 1) + 2x - 1$ $[x > 1]$

13 $2x\left(x + \frac{1}{8}\right) - 1 > (x + 1)(2x + 3) - 3x$ $\left[x < -\frac{16}{7}\right]$

Copyright © 2010 Zanichelli editore SpA, Bologna [6821 der]
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

RECUPERO
I SISTEMI DI DISEQUAZIONI

1 **COMPLETA**

Risolvi il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases}(x+4)(x-3) \leq -2+(x-3)(x+3)\\ 6(2x-3)-2(x+1)<3(5x-6)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cancel{x^2}-\ldots x+\ldots x-12 \leq -2+\cancel{x^2}-\ldots\\ 12x-\cancel{\ldots}-2x-\ldots<\ldots x-\cancel{18}\end{cases}$$

Esegui le moltiplicazioni e sviluppa il prodotto notevole.

$$\begin{cases}-\ldots x+\ldots x \leq +12-2-\ldots\\ 12x-2x-\ldots x<+\ldots\end{cases}$$

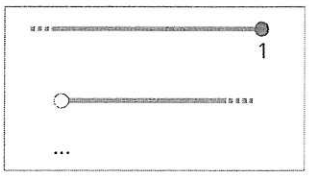
Applica la regola di cancellazione e la regola del trasporto e somma i termini simili.

$$\begin{cases}\ldots \leq 1\\ -5x<\ldots\end{cases} \rightarrow \begin{cases}\ldots \leq 1\\ x>\ldots\end{cases}$$

Risolvi due disequazioni.

$\ldots \leq 1$

$x > -\ldots$



Rappresenta le soluzioni delle due disequazioni.

$\ldots < x \leq 1$

Scrivi la soluzione del sistema: sono i valori di x che soddisfano contemporaneamente le due disequazioni.

2 **PROVA TU**

Risolvi il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases}3(x-4)-9x<2(2x-1)\\ 6(x-2)<3(x-3)-8x-3\end{cases}$$

$$\begin{cases}3x-\ldots-9x<\ldots x-2\\ 6x-\ldots<\ldots x-9-8x-3\end{cases}$$

$$\begin{cases}3x-9x-\ldots x<+\ldots-2\\ 6x-\ldots x+8x<+\ldots-9-3\end{cases}$$

$$\begin{cases}-\ldots x<\ldots\\ \ldots x<0\end{cases} \rightarrow \begin{cases}x>-\ldots\\ x<0\end{cases}$$

$x > -\ldots$

...

$x < 0$

$-\ldots < x < 0$

ossia

$]\ldots;0[$.

Copyright © 2010 Zanichelli editore SpA, Bologna [6821 der]
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni.

3 $\begin{cases} 9-2x>3x-1 \\ x-2>7+4x \end{cases}$ $[x<-3]$

4 $\begin{cases} 2(3x-5)-1<x-1 \\ (x+1)^2 \leq x(x+3) \end{cases}$ $[1 \leq x<2]$

5 $\begin{cases} \frac{3}{2}x>\frac{2x+3}{3} \\ 2x+1 \leq 2+3x \end{cases}$ $\left[x>\frac{6}{5}\right]$

6 $\begin{cases} (2x-1)^2>(4x-1)(x+3) \\ x-2<4-2x \end{cases}$ $\left[x<\frac{4}{15}\right]$

7 $\begin{cases} \frac{1}{6}-\frac{3}{2}x<\frac{1}{2}x+\frac{2}{3} \\ x+\frac{5}{2}<\frac{x}{2}-2 \end{cases}$ [impossibile]

8 $\begin{cases} \frac{2x-9}{3} \geq 4x-\frac{4}{3} \\ (x-1)^2<x(x-3) \end{cases}$ $[x<-1]$

9 $\begin{cases} \frac{x-1}{2}>\frac{x+1}{4} \\ x-2(3x+5)<0 \end{cases}$ $[x>3]$

10 $\begin{cases} \frac{x+1}{2}>\frac{3x+1}{3} \\ 3(x-1)-x^2<2-(x-1)(x+1) \end{cases}$ $\left[x<\frac{1}{3}\right]$

11 $\begin{cases} (x-1)^2 \leq 5+x(x-3) \\ \frac{1}{3}x+3>2x \end{cases}$ $\left[x<\frac{9}{5}\right]$

12 $\begin{cases} (x+2)(x-3)+x^2>(2x-1)(x+1) \\ 3(x+1)+2(x-2)<x+4 \end{cases}$ $\left[x<-\frac{5}{2}\right]$

Copyright © 2010 Zanichelli editore SpA, Bologna [6821 der]
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

RECUPERO
LE ESPRESSIONI CON I RADICALI

1 **COMPLETA**

Semplifica la seguente espressione:

$$\sqrt[4]{\frac{x-2}{x+5}} : \sqrt{\frac{x-2}{x+5}} - \sqrt[4]{\frac{x+5}{2^4(x-2)}}.$$

$$\sqrt[4]{\frac{x-2}{x+5}} : \sqrt{\frac{x-2}{x+5}} - \sqrt[4]{\frac{x+5}{2^4(x-2)}} =$$

$$= \sqrt[\cdots]{\frac{x-2}{x+5} : \frac{(x-2)^{\cdots}}{(x+5)^{\cdots}}} - \frac{1}{\ldots}\sqrt[4]{\frac{x+5}{x-2}} =$$

Fai la divisione tra i radicali di indice diverso $\sqrt[n]{a} : \sqrt[m]{a} = \sqrt[n \cdot m]{a^m : a^n}$ e trasporta 2^4 fuori dalla radice.

$$= \sqrt[\cdots]{\frac{x-2}{x+5} \cdot \frac{(x+5)^{\cdots}}{(x-2)^{\cdots}}} - \frac{1}{\ldots}\sqrt[4]{\frac{x+5}{x-2}} =$$

Trasforma la divisione in moltiplicazione.

$$= \sqrt[\cdots]{\frac{x+5}{x-2}} - \frac{1}{\ldots}\sqrt[4]{\frac{x+5}{x-2}} =$$

Esegui la moltiplicazione.

$$= \left(1 - \frac{1}{\ldots}\right)\sqrt[\cdots]{\frac{x+5}{x-2}} =$$

Somma i radicali simili.

$$= \frac{1}{\ldots}\sqrt[\cdots]{\frac{x+5}{x-2}}$$

Esegui la sottrazione nella parentesi tonda.

2 **PROVA TU**

Semplifica la seguente espressione:

$$\sqrt[4]{\frac{y+3}{y-2}} : \sqrt{\frac{y+3}{y-2}} + \sqrt[4]{\frac{y-2}{2^4(y+3)}}.$$

$$\sqrt[4]{\frac{y+3}{y-2}} : \sqrt{\frac{y+3}{y-2}} + \sqrt[4]{\frac{y-2}{2^4(y+3)}} =$$

$$= \sqrt[\cdots]{\frac{y+3}{y-2} : \frac{(y+3)^{\cdots}}{(y-2)^{\cdots}}} + \frac{1}{\ldots}\sqrt[4]{\frac{y-2}{y+3}} =$$

$$= \sqrt[\cdots]{\frac{y+3}{y-\ldots} \cdot \frac{(y-2)^{\cdots}}{(y+3)^{\cdots}}} + \frac{1}{\ldots}\sqrt[4]{\frac{y-2}{y+3}} =$$

$$= \sqrt[\cdots]{\frac{y-2}{y+3}} + \frac{1}{\ldots}\sqrt[4]{\frac{y-2}{y+3}} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{\ldots}\right)\sqrt[4]{\frac{y-2}{y+3}} =$$

$$= \frac{\ldots}{\ldots}\sqrt[4]{\frac{y-2}{y+3}}$$

Copyright © 2010 Zanichelli editore SpA, Bologna [6821 der]
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

Semplifica le seguenti espressioni.

3 $a\sqrt{\frac{b}{a}} \cdot \sqrt{\frac{x}{b}}$ $[\sqrt{ax}]$

4 $\sqrt{a^3b} \cdot \sqrt{a^5b^7}$ $[a^4b^4]$

5 $\sqrt{(x^2-1)} : \sqrt{x+1}$ $[\sqrt{x-1}]$

6 $[(2\sqrt{3}-1)(2\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}-1)^2]$ $[7+2\sqrt{3}]$

7 $\frac{x}{3} \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{3}{2x}}\right)^2$ $\left[\sqrt[3]{\frac{x}{12}}\right]$

8 $\frac{x+y}{2} \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{8}{x+y}}\right)^2$ $[2\sqrt[3]{x+y}]$

9 $\sqrt{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}} : \sqrt{x+y}$ $\left[\sqrt{\frac{x-y}{xy}}\right]$

10 $[(2\sqrt{a}-1)^2-(2\sqrt{a}-1)(2\sqrt{a}+1)]$ $[2-4\sqrt{a}]$

11 $[(3\sqrt{5}-1)(3\sqrt{5}+1)-(\sqrt{5}-1)^2] : 2$ $[19+\sqrt{5}]$

12 $\frac{a+b}{3ab} \cdot \left(\sqrt[3]{\frac{27ab}{a^2+b^2+2ab}}\right)^2$ $\left[\frac{3}{\sqrt[3]{ab(a+b)}}\right]$

Copyright © 2010 Zanichelli editore SpA, Bologna [6821 der]
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

RECUPERO
EQUAZIONI E DISEQUAZIONI CON COEFFICIENTI IRRAZIONALI

1 **COMPLETA**

Risolvi la disequazione $x - 2\sqrt{3} < \sqrt{3}(x - 1)$.

$x - 2\sqrt{3} < \sqrt{3}(x - 1)$

$x - 2\sqrt{3} < \sqrt{3}x - \ldots$ — Elimina le parentesi calcolando il prodotto.

$x - \sqrt{3}x < +2\sqrt{3} - \ldots$ — Applica la regola del trasporto.

$x(1 - \ldots) < +\sqrt{3}$ — Raccogli la x al primo membro e somma i radicali simili nel secondo.

$\frac{x\cancel{(1-\ldots)}}{\cancel{1-\ldots}} > \frac{\ldots\sqrt{3}}{1-\ldots}$ — Dividi entrambi i membri per il coefficiente della x; poiché è negativo devi cambiare il verso della disequazione.

$x > \frac{\ldots\sqrt{3}}{1-\ldots} \cdot \frac{1+\ldots}{1+\ldots}$ — Razionalizza il radicale nel secondo membro.

$x > \frac{\ldots\sqrt{3}+\ldots}{1-\ldots}$

2 **PROVA TU**

Risolvi la seguente disequazione:

$(2 - \sqrt{3})x \geq 2x - \sqrt{3}$.

$(2 - \sqrt{3})x \geq 2x - \sqrt{3}$

$2x - \ldots x \geq 2x - \sqrt{3}$

$\cancel{2x} - \ldots x - \cancel{\ldots} \geq -\sqrt{3}$

$-\ldots x \geq -\sqrt{3}$

$\frac{-\ldots x}{-\ldots} \ldots \frac{-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}}$

$x \leq \ldots$.

3 **PROVA TU**

Risolvi la seguente equazione fratta:

$$\frac{1}{3} - \frac{x+1}{x+\sqrt{3}} = \frac{x+2\sqrt{3}}{3(x+\sqrt{3})}.$$

m.c.m. $= 3(x + \ldots)$

C.E.: $x + \ldots \neq 0 \Rightarrow x \neq \ldots$

$\frac{1}{\cancel{3}} \cdot \cancel{3}(x+\ldots) - \frac{x+1}{\cancel{x+\sqrt{3}}} \cdot 3\cancel{(x+\ldots)} = \frac{x+2\sqrt{3}}{\cancel{3}\cancel{(x+\sqrt{3})}} \cdot \cancel{3}\cancel{(x+\ldots)}$

Copyright © 2010 Zanichelli editore SpA, Bologna [6821 der]
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

$$x + \ldots - 3x - \ldots = x + 2\sqrt{3}$$
$$x - 3x - \ldots = \ldots + 3 + 2\sqrt{3}$$
$$-3x = 3 + \ldots\sqrt{3}$$
$$\frac{-3x}{-3} = \frac{3 + \ldots\sqrt{3}}{-3}$$
$$x = -\frac{3 + \ldots\sqrt{3}}{3} \qquad \text{soluzione} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Risolvi le seguenti equazioni e disequazioni.

4 $\dfrac{x\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - x$ $\left[x = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\right]$

5 $x(1 + \sqrt{3}) \leq 3(x + \sqrt{3})$ $[x \geq -9 - 6\sqrt{3}]$

6 $\dfrac{x+2}{\sqrt{2}} - \dfrac{x}{2} \leq \dfrac{x}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}$ $[x \geq -2\sqrt{2}]$

7 $\dfrac{2x}{\sqrt{5}+1} + \dfrac{3}{4} \leq \dfrac{1}{\sqrt{5}-1}$ $\left[x \leq \dfrac{3 - \sqrt{5}}{8}\right]$

Copyright © 2010 Zanichelli editore SpA, Bologna [6821 der]
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

RECUPERO
LE EQUAZIONI NUMERICHE INTERE

1 **COMPLETA**

Risolvi la seguente equazione:

$2(2-3x)-x(3-2x)=0.$

$4-\ldots-\ldots+\ldots=0$ — Svolgi i calcoli.

$2x^2-9x+4=0$ — Sommando i monomi simili ottieni questa equazione di secondo grado.

$\Delta=\ldots-4\cdot\ldots\cdot\ldots=49$ — Calcola il discriminante $\Delta=b^2-4ac$.

$x=\dfrac{\ldots\pm\sqrt{\ldots}}{2\cdot\ldots}=\begin{cases}4\\ \dfrac{1}{2}\end{cases}$ — Calcola le soluzioni applicando la formula risolutiva.

2 **PROVA TU**

Risolvi la seguente equazione:

$x(1+3x)=1-x.$

$\ldots+3\ldots-1+\ldots=0$

$3\ldots+\ldots-\ldots=0$

$\Delta=\ldots+\ldots=16$

$x=\dfrac{\ldots\pm\sqrt{\ldots}}{2}\cdot\ldots=\begin{cases}\ldots\\ \ldots\end{cases}$

Risolvi le seguenti equazioni.

3 $\dfrac{2x+1}{2}+\dfrac{x^2-4}{12}-x=\dfrac{3-x^2}{4}$ $\left[\pm\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right]$

4 $4(x^2-1)=2(2x+1)-3$ $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{3}{2}\right]$

5 $\dfrac{x^2+2x}{6}+\dfrac{x^2}{3}=-1$ $[\varnothing]$

6 $\dfrac{x^2+3}{3}=\dfrac{(x-1)(x+2)}{6}+\dfrac{4}{3}$ $[0;1]$

7 $x^2-3x=\dfrac{x}{3}-1$ $\left[3;\dfrac{1}{3}\right]$

8 $(2x+3)^2=4(3x+4)+1$ $[\pm\sqrt{2}]$

9 $\left(1-\dfrac{3}{8}\right)x^2-\dfrac{1}{16}=\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{16}\right)x+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}\right)x^2$ $\left[-\dfrac{1}{8};1\right]$

Copyright © 2010 Zanichelli editore SpA, Bologna [6821 der]
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

RECUPERO
LE EQUAZIONI NUMERICHE FRATTE

1 COMPLETA

Risolvi la seguente equazione:

$$\frac{2x-1}{3}=\frac{1}{x}.$$

m.c.m. $= 3x$ — Determina il m.c.m. e trova le C.E.

C.E.: $3x \neq 0 \Rightarrow x \neq \ldots$

$\frac{2x-1}{\cancel{3}}\cdot\cancel{3x}=\frac{1}{\cancel{x}}\cdot\cancel{3x}$ — Moltiplica entrambe le frazioni per il m.c.m. e semplifica.

$2x^{\cdots}-\ldots=3$ — Calcola i prodotti.

$2x^{\cdots}-\ldots-3=0$ — Porta tutti i termini a sinistra ordinandoli in modo decrescente rispetto a x.

$a=\ldots,\ b=\ldots,\ c=\ldots$ — Individua i coefficienti a, b, c.

$\Delta=b^2-4ac$ — Calcola il Δ.

$\Delta=(\ldots)^2-4\cdot(2)\cdot(\ldots)=\ldots+24=25$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2\cdot 2}=\frac{1\pm\ldots}{4}=\begin{cases}\frac{1+\ldots}{4}=\frac{\ldots}{4}=\frac{\ldots}{2}\\ \frac{1-\ldots}{4}=\frac{\ldots}{4}=\ldots\end{cases}$$

Applica la formula $x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2\cdot a}$.

$x_1=\frac{\ldots}{2};\ x_2=\ldots$ — Scrivi le soluzioni.

2 PROVA TU

Risolvi la seguente equazione:

$$\frac{x-12}{2x}+\frac{x-2}{2}=0.$$

m.c.m. $= 2x$

C.E.: $2x \neq 0 \Rightarrow x \neq \ldots$

$\frac{x-12}{\cancel{2x}}\cdot\cancel{\ldots}+\frac{x-2}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}x=0$

$x-12+x^{\cdots}-2x=0$

$x^2-\ldots\ldots-12=0$

$a=\ldots,\ b=\ldots,\ c=\ldots$

$\Delta=b^2-4ac$

$\Delta=(-1)^2-4\cdot(1)(\ldots)=\ldots+48=49$

Copyright © 2010 Zanichelli editore SpA, Bologna [6821 der]
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{\dots}}{2 \cdot (\dots)} = \frac{1 \pm \dots}{2} = \begin{cases} \dfrac{1 + \dots}{2} = \dfrac{\dots}{2} = \dots \\[2ex] \dfrac{1 - \dots}{2} = \dfrac{\dots}{2} = \dots \end{cases}$$

$x_1 = \dots,\ x_2 = \dots.$

Risolvi le seguenti equazioni.

3 $\dfrac{2x-1}{x} = \dfrac{2}{x+1}$ $\left[1; -\dfrac{1}{2}\right]$

4 $\dfrac{2x+1}{6} = \dfrac{1}{x}$ $\left[x \neq 0; -2; \dfrac{3}{2}\right]$

5 $\dfrac{2}{x} + \dfrac{x}{x-4} = 0$ $[x \neq 0 \wedge x \neq 4; 2; -4]$

6 $\dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x-3}{x^2-1} = 0$ $[x \neq \pm 1; -3; 1 \text{ non acc.}]$

7 $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{x}{2x-1}$ $\left[x \neq \dfrac{1}{2}; 1; -\dfrac{1}{2}\right]$

8 $\dfrac{x+1}{x} - 2x = \dfrac{x^2+3}{2x} + 4$ $\left[-1; -\dfrac{1}{5}\right]$

Copyright © 2010 Zanichelli editore SpA, Bologna [6821 der]
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

RECUPERO
LE EQUAZIONI BINOMIE, TRINOMIE E BIQUADRATICHE

1 **COMPLETA**

Risolvi la seguente equazione:

$2x^4 + 5x^2 - 7 = 0.$

$2x^4 + 5x^2 - 7 = 0$

$x^2 = z \rightarrow 2z^2 + 5\ldots - 7 = 0$ — Poni $x^2 = z$ e trasforma l'equazione in un'equazione di secondo grado in z.

$\Delta = 25 + \ldots = 81$ — Risolvi l'equazione di secondo grado $2z^2 + 5z - 7 = 0$.

$$z = \frac{-5 \pm \sqrt{81}}{\ldots} = \frac{-5 \pm 9}{\ldots} = \begin{cases} -\dfrac{14}{\ldots} = -\dfrac{7}{\ldots} \\ \dfrac{4}{\ldots} = 1 \end{cases}$$

$x^2 = -\dfrac{7}{\ldots}$ impossibile — Sostituisci i valori trovati nell'equazione $x^2 = z$.

$x^2 = 1 \rightarrow x = \pm\ldots$ — Scrivi le soluzioni.

2 **PROVA TU**

Risolvi la seguente equazione:

$x^4 - x^2 - 6 = 0.$

$x^4 - x^2 - 6 = 0$

$x^2 = z \rightarrow z^{\cdots} - z - 6 = 0$

$\Delta = 1 + \ldots = 25$

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{\ldots} = \frac{1 \pm 5}{\ldots} = \begin{cases} -\dfrac{4}{\ldots} = -\ldots \\ \dfrac{6}{\ldots} = 3 \end{cases}$$

$x^2 = -\ldots \rightarrow$ .....

$x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

Le soluzioni dell'equazione sono:

$x_1 = -\sqrt{3}$ e $x_2 = \ldots.$

Copyright © 2010 Zanichelli editore SpA, Bologna [6821 der]
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

Risolvi le seguenti equazioni.

3 $4x^4 - 11x^2 - 3 = 0$ $[\pm\sqrt{3}]$

4 $4x^4 - 5x^2 + 1 = 0$ $\left[\pm 1; \pm\frac{1}{2}\right]$

5 $x^4 - x^2 - 12 = 0$ $[\pm 2]$

6 $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ $[\pm 1; \pm 3]$

7 $x^3 - 27 = 0$ $[3]$

8 $81x^4 - 16 = 0$ $\left[\pm\frac{2}{3}\right]$

9 $x^4 + 16 = 0$ [impossibile]

10 $x^4 - x^2 - 20 = 0$ $[\pm\sqrt{5}]$

11 $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$ $[-1; 2]$

12 $4x^4 - 3x^2 - 1 = 0$ $[\pm 1]$

Copyright © 2010 Zanichelli editore SpA, Bologna [6821 der]
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

RECUPERO
LE DISEQUAZIONI DI SECONDO GRADO INTERE

1 **COMPLETA**

Risolvi la seguente disequazione:

$4x^2 - 12x - 7 > 0.$

$4x^2 - 12x - 7 > 0.$

$4x^2 - 12x - \ldots = \ldots$ — Scrivi l'equazione associata.

$\frac{\Delta}{4} = (6)^2 - 4(\ldots) = 36 + \ldots = \ldots$ — Risolvi l'equazione associata.

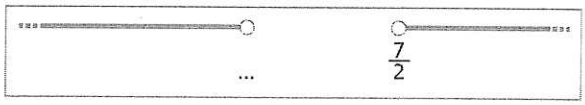
$$x = \frac{6 \pm \sqrt{\ldots}}{4} = \frac{6 \pm \ldots}{4} = \begin{cases} \frac{7}{2} \\ \ldots \end{cases}$$

$x < \ldots \vee x > \frac{7}{2}$

ossia

$]-\infty; \ldots[\cup \left]\frac{7}{2}; \ldots\right[$

Applica la regola: se l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ (con $a > 0$) ha $\Delta > 0$, la disequazione $ax^2 + bx + c > 0$ è verificata per valori esterni all'intervallo delle radici dell'equazione. Determina l'intervallo delle soluzioni.



2 **PROVA TU**

Risolvi la seguente disequazione:

$3x^2 - 5x - 2 \geq 0.$

$3x^2 - 5x - 2 \geq 0.$

$3x^2 - \ldots - 2 = \ldots$

$\Delta = (\ldots)^2 - 4(3)(-2) = \ldots + 24 = \ldots$

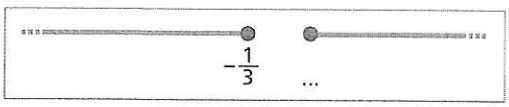
$$x = \frac{\ldots \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{\ldots \pm 7}{6} = \begin{cases} \ldots \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$$

La disequazione è verificata per:

$x \leq -\frac{1}{3} \vee x \geq \ldots$

ossia

$\left]\ldots; \frac{1}{3}\right] \cup [\ldots; +\infty[.$



Copyright © 2010 Zanichelli editore SpA, Bologna [6821 der]
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

Risolvi le seguenti disequazioni.

3 $3x^2 - 8x + 7 < 0$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

4 $x^2 - 2x - 8 > 0$ $[x < -2 \vee x > 4]$

5 $x^2 + 4x + 3 < 0$ $[-3 < x < -1]$

6 $x^2 + 5x + 7 > 0$ $[\forall x \in \mathbb{R}]$

7 $-x^2 + 25 \geq 0$ $[-5 \leq x \leq 5]$

8 $x(x-3) + 5 < \frac{3}{4}x$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

9 $x^2 + \frac{x(x-2)}{4} \geq \frac{3}{4}$ $\left[x \leq -\frac{3}{5} \vee x \geq 1\right]$

10 $\frac{13}{9}x^2 + 1 \leq x^2 + \frac{4}{3}x$ $\left[x = \frac{2}{3}\right]$

11 $x(x+1) + \frac{1}{6} > 2\left(x + \frac{11}{24}\right)$ $\left[x < -\frac{1}{2} \vee x > \frac{3}{2}\right]$

12 $\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \leq \frac{4}{3}\left(x - \frac{1}{4}\right)$ $\left[\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{7}{3}\right]$

Copyright © 2010 Zanichelli editore SpA, Bologna [6821 der]
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

RECUPERO
IL METODO DI SOSTITUZIONE E IL METODO DEL CONFRONTO

1 **COMPLETA**

Risolvi il seguente sistema con i metodi di sostituzione e del confronto:

$$\begin{cases} 2(y-1)+3(x+1)=0 \\ y+2-(x+1)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(y-1)+3(x+1)=0 \\ y+2-(x+1)=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\ldots-\ldots+3x+3=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots-x-1=0 \end{cases}$$

Esegui le moltiplicazioni nelle due equazioni.

$$\begin{cases} 3x+\ldots=-1 \\ -x+\ldots=-1 \end{cases}$$

Applica la regola del trasporto e somma i termini simili per portare il sistema in forma normale.

$$\begin{cases} 3x+\ldots=-1 \\ x-\ldots=+1 \end{cases}$$

Metodo di sostituzione

$$\begin{cases} 3x+\ldots=-1 \\ x=1+\ldots \end{cases}$$

Ricava x dalla seconda equazione.

$$\begin{cases} 3(1+y)+\ldots=-1 \\ x=1+\ldots \end{cases}$$

Nella prima equazione, al posto di x, sostituisci l'espressione trovata per x in funzione di y.

$$\begin{cases} 3+3y+\ldots=-1 \\ x=1+\ldots \end{cases}$$

Esegui le operazioni nella prima equazione.

$$\begin{cases} \ldots y=-4 \\ x=1+\ldots \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{4}{\ldots} \\ x=1+\ldots \end{cases}$$

Ricava y dalla prima equazione.

$$\begin{cases} y=-\dfrac{4}{\ldots} \\ x=1-\dfrac{4}{\ldots}=\dfrac{1}{5} \end{cases}$$

Sostituisci $y=-\dfrac{4}{5}$ nella seconda equazione e ricava x.

La soluzione è $\left(\dfrac{1}{5};-\dfrac{4}{\ldots}\right)$.

Scrivi la soluzione del sistema.

Copyright © 2010 Zanichelli editore SpA, Bologna [6821 der]
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

Metodo del confronto

$$\begin{cases} x = \dfrac{-2y-1}{\dots} \\ x = \dots + 1 \end{cases}$$

Ricava x da entrambe le equazioni.

$$\begin{cases} \dfrac{-2y-1}{\dots} = \dots + 1 \\ x = \dots + 1 \end{cases}$$

Uguaglia le espressioni ottenute ricavando un'equazione nella sola variabile y e metti a sistema con un'equazione.

$$\begin{cases} -2y-1 = \dots + 3 \\ x = \dots + 1 \end{cases}$$

Risolvi l'equazione nella sola variabile y.

$$\begin{cases} 5y = \dots \rightarrow y = -\dfrac{\dots}{5} \\ x = \dots + 1 \end{cases}$$

Ricava y nella prima equazione.

$$\begin{cases} y = -\dfrac{\dots}{5} \\ x = -\dfrac{\dots}{5} + 1 = \dfrac{\dots}{5} \end{cases}$$

Sostituisci il valore di y nella seconda equazione.

La soluzione è $\left(\dfrac{1}{5}; -\dfrac{\dots}{5}\right)$.

Scrivi la soluzione del sistema.

2 PROVA TU

Risolvi il seguente sistema con il metodo di sostituzione e con quello del confronto:

$$\begin{cases} 3y - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{4}x \\ \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{2}{3}x - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y - \dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{4}x \\ \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{2}{3}x - y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{12y - \dots}{\cancel{4}} = \dfrac{-x}{\cancel{4}} \\ \dfrac{x + \dots}{\cancel{3}} = \dfrac{\dots - 3y}{\cancel{3}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + \dots y = \dots \\ \dots + 3y = -1 \end{cases}$$

Copyright © 2010 Zanichelli editore SpA, Bologna [6821 der]
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

Metodo di sostituzione

$$\begin{cases} x = -12y + \dots \\ -(-12y + \dots) + 3y = -\dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -12y + \dots \\ \dots y - \dots + 3y = -\dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -12y + \dots \\ \dots y = \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{5}{\dots} = \dfrac{1}{\dots} \\ x = -12\left(\dfrac{1}{\dots}\right) + \dots = \dots \end{cases}$$

La soluzione è: $\left(\dots ; \dfrac{1}{\dots}\right)$.

Metodo del confronto

$$\begin{cases} x = 6 - \dots \\ x = 3y + \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 - \dots = 3y + \dots \\ x = 3y + \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dots - 3y = -6 + \dots \\ x = 3y + \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dots y = -5 \\ x = 3y + \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{5}{\dots} = \dfrac{1}{\dots} \\ x = 3\left(\dfrac{1}{\dots}\right) + 1 = \dots \end{cases}$$

La soluzione è: $\left(\dots ; \dfrac{1}{\dots}\right)$.

Risolvi i seguenti sistemi con i metodi di sostituzione e del confronto.

3 $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$ $[(-1; 3)]$

4 $\begin{cases} x - y = -2 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ $[(0; 2)]$

5 $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 6x + 3y = -9 \end{cases}$ $\left[\left(-\dfrac{1}{2}; -2\right)\right]$

6 $\begin{cases} 4x - 3y = 6 \\ x - y = 1 \end{cases}$ $[(3; 2)]$

7 $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ x - 4y = -2 \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{3}\right)\right]$

8 $\begin{cases} 4x + 3y = -2 \\ 2x - y = -6 \end{cases}$ $[(-2; 2)]$

9 $\begin{cases} 5x - 6y = 4 \\ x - 6y = 2 \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{1}{2}; -\dfrac{1}{4}\right)\right]$

10 $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - 4y = 3 \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{5}{3}; -\dfrac{1}{3}\right)\right]$

11 $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 2 \end{cases}$ $[(0; 1)]$

12 $\begin{cases} 3x + y = 2 \\ 7x - 9y = -1 \end{cases}$ $\left[\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)\right]$

13 $\begin{cases} 3x + 4y = 1 \\ 6x + 3y = -8 \end{cases}$ $\left[\left(-\dfrac{7}{3}; 2\right)\right]$

14 $\begin{cases} 5x - 2y = -1 \\ 3x + 3y = 12 \end{cases}$ $[(1; 3)]$

Copyright © 2010 Zanichelli editore SpA, Bologna [6821 der]
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

RECUPERO
I SISTEMI DI SECONDO GRADO

1 **COMPLETA**

Risolvi il seguente sistema:

$$\begin{cases}(x-y)^2+2x=3x-y\\ x+2y+3=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-y)^2+2x=3x-y\\ x+2y+3=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2+y^2-\ldots+2x-3x+\ldots=0\\ x+2y+3=0\end{cases}$$

Sviluppa il prodotto notevole nella prima equazione e trasporta tutti i termini a primo membro.

$$\begin{cases}x^2+y^2-2xy-\ldots+\ldots=0\\ x=-2y-3\end{cases}$$

Somma i termini simili nella prima equazione e ricava x nella seconda.

$$\begin{cases}(-2y-3)^2+y^2-2y(-2y-3)-(\ldots\ldots)+\ldots=0\\ x=-2y-3\end{cases}$$

Sostituisci nella prima equazione, al posto di x, $-2y-3$.

$$\begin{cases}4y^2+9+\ldots+y^2+4y^2+\ldots+2y+3+\ldots=0\\ x=-2y-3\end{cases}$$

Esegui i calcoli nella prima equazione.

$$\begin{cases}9y^2+\ldots y+12=0\\ x=-2y-3\end{cases}$$

Somma i termini simili.

$$9y^2+\ldots y+12=0$$

Risolvi l'equazione di secondo grado.

$$y=\frac{-\ldots\pm\sqrt{\ldots-432}}{18}=\frac{-\ldots\pm 3}{18}=\begin{cases}-\dfrac{\ldots}{3}\\ -1\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=-1\\ x=-2y-3\end{cases}\quad\vee\quad\begin{cases}y=-\dfrac{\ldots}{3}\\ x=-2y-3\end{cases}$$

Risolvi i sistemi.

$$\begin{cases}y=-1\\ x=-1\end{cases}\quad\vee\quad\begin{cases}y=-\dfrac{\ldots}{3}\\ x=-2\left(-\dfrac{\ldots}{3}\right)-3=\dfrac{\ldots}{3}-3=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

$$(-1;-1),\left(-\frac{1}{3};\frac{\ldots}{3}\right).$$

Scrivi le soluzioni del sistema.

Copyright © 2010 Zanichelli editore SpA, Bologna [6821 der]
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi

2 **PROVA TU**

Risolvi il seguente sistema:

$$\begin{cases}(x-y)^2+12=4(x^2+y^2)\\ x-y=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-y)^2+12=4(x^2+y^2)\\ x-y=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^2+y^2-\ldots+12=4x^2+4y^2\\ x-y=2\end{cases}$$

$$\begin{cases}-3x^2-3y^2-\ldots+12=0\\ x=2+y\end{cases}$$

$$\begin{cases}-3(2+y)^2-3y^2-\ldots(2+y)+12=0\\ x=2+y\end{cases}$$

$$\begin{cases}-3(4+y^2+\ldots)-3y^2-\ldots-\ldots+12=0\\ x=2+y\end{cases}$$

$$\begin{cases}-\cancel{12}-3y^2-\ldots-3y^2-\ldots-\ldots+\cancel{12}=0\\ x=2+y\end{cases}$$

$$\begin{cases}-8y^2-\ldots y=0\\ x=2+y\end{cases}$$

$$-8y^2-\ldots y=0$$

$$-8y(y+\ldots)=0 \quad \begin{cases} y=0 \\ y=-\ldots \end{cases}$$

$$\begin{cases}y=0\\ x=2+y\end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases}y=-\ldots\\ x=2+y\end{cases}$$

$$\begin{cases}y=0\\ x=2\end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases}y=-\ldots\\ x=\ldots\end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono: (2; 0) e (…; − …).

Risolvi i seguenti sistemi.

3 $\begin{cases}y-x=3\\ 9+(y+x)^2=2(xy+13)\end{cases}$ [(1; 4), (− 4; − 1)]

4 $\begin{cases}y=4\\ x^2-y=12\end{cases}$ [(− 4; 4), (4; 4)]

5 $\begin{cases}x+y=3\\ 2x-y^2=3\end{cases}$ [(2; 1), (6; − 3)]

6 $\begin{cases}x^2-x=y\\ y-x=3\end{cases}$ [(− 1; 2), (3; 6)]

7 $\begin{cases}2x^2-x(x+2y)=0\\ y=2x-3\end{cases}$ [(0; − 3), (2; 1)]

8 $\begin{cases}x+y=2\\ x^2+y^2-6y+8=0\end{cases}$ [(− 1; 3), (0; 2)]

Copyright © 2010 Zanichelli editore SpA, Bologna [6821 der]
Questo file è una estensione online dei corsi di matematica di Massimo Bergamini, Anna Trifone e Graziella Barozzi