ISTITUTO SALESIANO
«Beata Vergine di San Luca»
via Jacopo della Quercia, 1 - 40128 BOLOGNA
tel. 051/41.51.711 – *www.salesianibologna.net*
presidesup.bolognabv@salesiani.it
Il Preside

PASSERELLE/IDONEITÀ PER L'AMMISSIONE ALLA 4^ IPS

MATEMATICA

PROGRAMMA DI 3^ IPS

MATERIA COMUNE

Prof.: FRANCESCA FERLIN - ferlin.francesca.prof@salesianibologna.it

Argomenti su cui verterà la prova (relativamente al programma di 3^ IPS):

- **Disequazioni**
  - lineari 2° grado;
  - sistemi di disequazioni;
  - disequazioni fratte.

- **Geometria analitica**
  - rappresentare punti nel piano cartesiano;
  - calcolare distanze fra punti;
  - rappresentare rette;
  - rette parallele e perpendicolari;
  - rette passanti per due punti;
  - posizione reciproca di rette nel piano;
  - rappresentare parabole nel piano cartesiano;
  - posizione reciproca di rette e parabola.

- **Funzione esponenziale e logaritmica**
  - Definizione e proprietà
  - Curve esponenziale e logaritmica
  - Equazioni e disequazioni esponenziali
  - Equazioni e disequazioni logaritmiche

Esercizi o domandi simili a quelle che potrebbero capitare durante la prova:

- Vedi esercizi presenti nelle fotocopie allegate.

Materiale allegato (fotocopie del testo o altro – da lasciare alla Presidenza)

- Teoria ed esercizi relative alle disequazioni (5 pagine)
- Teoria ed esercizi relativi alla geometria analitica (9 pagine)
- Teoria ed esercizi relativi alla funzione esponenziale e logaritmica (14 pagine)

ISTITUTO SALESIANO "B.V.S.L." SCUOLE SECONDARIE PARITARIE PRESIDENZA BOLOGNA

2 Disequazioni di primo grado

▶ Esercizi a p. 25

Le disequazioni intere di primo grado possono sempre essere scritte in una delle seguenti forme, dopo aver opportunamente applicato i princìpi di equivalenza:

$$ax > b, \quad ax \geq b, \quad ax < b, \quad ax \leq b, \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

Risolvendo $ax > b$, otteniamo, a seconda dei valori di a:

- se $a > 0$, $\quad x > \dfrac{b}{a}$;
- se $a = 0$, $\quad 0 \cdot x > b$ $\begin{cases} \text{se } b > 0, S = \varnothing; \\ \text{se } b = 0, S = \varnothing; \\ \text{se } b < 0, S = \mathbb{R}; \end{cases}$
- se $a < 0$, $\quad x < \dfrac{b}{a}$.

Un ragionamento analogo vale anche per le altre tre disequazioni.
Risolviamo una disequazione numerica intera, applicando i princìpi di equivalenza:

$$2 + \frac{x}{4} \leq 1 + x \quad \rightarrow \quad \frac{x}{4} - x \leq 1 - 2 \quad \rightarrow \quad -\frac{3}{4}x \leq -1 \quad \rightarrow \quad x \geq \frac{4}{3}.$$

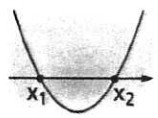
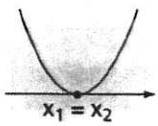
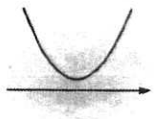
Un esempio di disequazione letterale è $ax - 1 \geq 2a$. Per risolverla occorre discutere le sue soluzioni al variare di a.

$$ax - 1 \geq 2a \quad \rightarrow \quad ax \geq 2a + 1 \begin{cases} \text{se } a > 0, \ x \geq \dfrac{2a+1}{a} \\ \text{se } a = 0, \ 0 \geq 1 \ \rightarrow \ \text{impossibile} \\ \text{se } a < 0, \ x \leq \dfrac{2a+1}{a} \end{cases}$$

Discutere le soluzioni di una disequazione letterale permette di ottenere le soluzioni di infinite disequazioni numeriche, quelle che si hanno sostituendo nella disequazione data valori particolari alla lettera (o alle lettere).

Disequazioni di secondo grado

Teoria:

disequazioni di secondo grado						
primo coeff.	discr.	grafico di $y = ax^2 + bx + c$	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c \geq 0$	$ax^2 + bx + c < 0$	$ax^2 + bx + c \leq 0$
$a > 0$	$\Delta > 0$		$x < x_1 \ \vee \ x > x_2$	$x \leq x_1 \ \vee \ x \geq x_2$	$x_1 < x < x_2$	$x_1 \leq x \leq x_2$
	$\Delta = 0$		$x \neq x_1 = x_2$	qualunque valore di x	nessun valore di x	$x = x_1 = x_2$
	$\Delta < 0$		qualunque valore di x	qualunque valore di x	nessun valore di x	nessun valore di x

ESEMPIO

Risolviamo le seguenti disequazioni.

a. $-4x^2-11x+3\geq 0$; b. $x^2-6x+9>0$; c. $2x^2+x+1<0$.

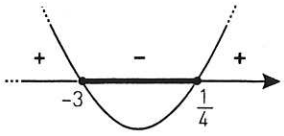
a. $-4x^2-11x+3\geq 0$) cambiamo segno ai termini e verso alla disequazione

$4x^2+11x-3\leq 0$ la disequazione richiede che il trinomio sia negativo o nullo

Risolviamo l'equazione associata:

$$4x^2+11x-3=0\rightarrow \Delta=121+48=169>0;\quad x=\frac{-11\pm\sqrt{169}}{8}\begin{cases} x_1=\dfrac{-11-13}{8}=-\dfrac{24}{8}=-3,\\ x_2=\dfrac{-11+13}{8}=\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}.\end{cases}$$

Compiliamo lo schema del segno del trinomio e scegliamo i valori di x per i quali il trinomio è negativo o nullo.

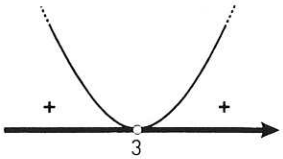


Le soluzioni della disequazione sono: $-3\leq x\leq \frac{1}{4}$.

b. $x^2-6x+9>0$ la disequazione richiede che il trinomio sia positivo

Equazione associata:

$x^2-6x+9=0\rightarrow \Delta=36-36=0;\quad x_1=x_2=3.$



Compiliamo lo schema del segno del trinomio e scegliamo i valori di x per i quali il trinomio è positivo.
Le soluzioni della disequazione sono tutti i valori reali diversi da 3:

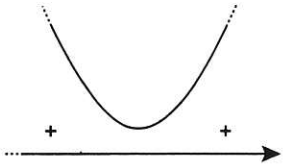
$x\neq 3.$

c. $2x^2+x+1<0$ la disequazione richiede che il trinomio sia negativo

Equazione associata:

$2x^2+x+1=0\rightarrow \Delta=1-8=-7<0\rightarrow$ non ci sono radici reali.

Compiliamo lo schema del segno del trinomio.
Per tutti i valori di x il trinomio è positivo, quindi la disequazione non ha soluzioni.
In simboli, scriviamo:



$\nexists\, x\in\mathbb{R}.$

Risolvi le seguenti disequazioni.

141 $x^2-1>\frac{15}{4}x$ $\left[x<-\frac{1}{4}\vee x>4\right]$

142 $4x^2+11x-3\leq 0$ $\left[-3\leq x\leq\frac{1}{4}\right]$

143 $x^2-4x-12\geq 0$ $[x\leq -2\vee x\geq 6]$

144 $-x^2+9\leq 0$ $[x\leq -3\vee x\geq 3]$

145 $4x^2+4x+9<0$ $[\nexists x\in\mathbb{R}]$

146 $-x^2+8x\geq 0$ $[0\leq x\leq 8]$

147 $-x^2+1>0$ $[-1<x<1]$

148 $-\frac{1}{4}x^2\leq 0$ $[\forall x\in\mathbb{R}]$

149 $x^2+2x+9\geq 0$ $[\forall x\in\mathbb{R}]$

150 $5x^2+9x-2\geq 0$ $\left[x\leq -2\vee x\geq\frac{1}{5}\right]$

151 $-4x(x-1)>1$ $[\nexists x\in\mathbb{R}]$

152 $x(x-2)+7>-2x$ $[\forall x\in\mathbb{R}]$

153 $(1-3x)(1+3x)<7x+1$ $\left[x<-\frac{7}{9}\vee x>0\right]$

154 $4x^2+12x+5<0$ $\left[-\frac{5}{2}<x<-\frac{1}{2}\right]$

159 $-x^2+14x-49<0$ $[x\neq 7]$

160 $-2x^2+7x-3<0$ $\left[x>3\vee x<\frac{1}{2}\right]$

161 $2(x-1)(x+3)\geq 0$ $[x\leq -3\vee x\geq 1]$

162 $x^2-2\sqrt{2}x+2\leq 0$ $[x=\sqrt{2}]$

163 $(x-2)(x+2)>5x-4$ $[x<0\vee x>5]$

164 $2(x^2+1)<5x$ $\left[\frac{1}{2}<x<2\right]$

165 $3\left(\frac{2}{3}-x\right)(x+4)\geq 0$ $\left[-4\leq x\leq\frac{2}{3}\right]$

166 $16(x^2+1)<40x+7$ $\left[\frac{1}{4}<x<\frac{9}{4}\right]$

167 $(x+1)^2+(2x-1)>\frac{x-5}{2}$ $\left[x<-\frac{5}{2}\vee x>-1\right]$

168 $(x+3)^2+12(2-x)>3(3-4x)$ $[\forall x\in\mathbb{R}]$

169 $2x(x+1)+4(x-2)+3(1-3x)>0$ $\left[x<-1\vee x>\frac{5}{2}\right]$

170 $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+2(8+x)<\frac{1}{4}(49+8x)$ $[\nexists x\in\mathbb{R}]$

5 Disequazioni fratte

▶ Esercizi a p. 38

Una disequazione è **fratta** se contiene l'incognita al denominatore. Può essere sempre trasformata in una disequazione del tipo

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0$$

o in altre analoghe con i diversi segni di disuguaglianza.

Per risolvere una disequazione fratta dobbiamo studiare il segno della frazione $\frac{A(x)}{B(x)}$, esaminando i segni di $A(x)$ e di $B(x)$. Dobbiamo imporre $B(x) \neq 0$ per la condizione di esistenza della frazione.

ESEMPIO ☐ **Animazione**

Risolviamo la disequazione $\frac{x^2-1}{2x^2-7x-4} \geq 0$.

Il denominatore deve essere non nullo, perciò:

$$\text{C.E.: } 2x^2-7x-4 \neq 0 \quad \rightarrow \quad x \neq -\frac{1}{2} \ \wedge \ x \neq 4.$$

Studiamo il segno del numeratore:

$$x^2-1>0 \quad \rightarrow \quad x<-1 \ \vee \ x>1.$$

Studiamo il segno del denominatore.

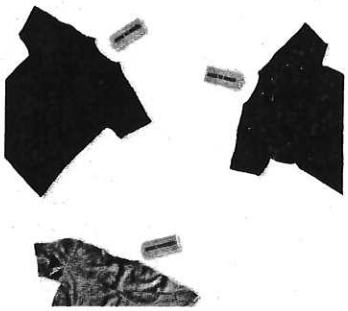
Le radici dell'equazione associata sono $-\frac{1}{2}$ e 4, quindi:

$$2x^2-7x-4>0 \quad \rightarrow \quad x<-\frac{1}{2} \ \vee \ x>4.$$

La frazione è uguale a 0 quando lo è il suo numeratore, mentre se il denominatore è uguale a 0 la frazione non esiste. In questo caso, nello schema, utilizziamo il simbolo $\nexists$.

MATEMATICA ED ECONOMIA

Made in... Negli ultimi anni i prodotti «made in China» hanno invaso il mercato mondiale e spinto gli altri Paesi a trovare nuove strategie per restare competitivi.



▶ Quando è più conveniente importare un bene dall'estero anziché produrlo?

☐ **La risposta**

		-1		$-\frac{1}{2}$		1		4	
x^2-1	+	0	−		−	0	+		+
$2x^2-7x-4$	+		+	0	−		−	0	+
$\frac{x^2-1}{2x^2-7x-4}$	+	0	−	$\nexists$	+	0	−	$\nexists$	+

La disequazione fratta è verificata per:

$$x \leq -1 \ \vee \ -\frac{1}{2} < x \leq 1 \ \vee \ x > 4.$$

▶ Risolvi la disequazione $\frac{x^2-4x}{x-3} \leq 0$.

$[x \leq 0 \vee 3 < x \leq 4]$

275 **ESERCIZIO GUIDA** Risolviamo la disequazione $\frac{x^2-10x+24}{2x^2-7x-15} > 0$.

- Studiamo il segno del numeratore:

  $x^2 - 10x + 24 > 0$.

  Equazione associata:

  $x^2 - 10x + 24 = 0$

  $\frac{\Delta}{4} = 25 - 24 = 1 \rightarrow x = 5 \pm 1 \begin{cases} 6, \\ 4. \end{cases}$

  Il numeratore è positivo per valori esterni all'intervallo di estremi 4 e 6:

  $x < 4 \vee x > 6$.

- Studiamo il segno del denominatore:

  $2x^2 - 7x - 15 > 0$.

  Equazione associata:

  $2x^2 - 7x - 15 = 0$

  $\Delta = 49 + 120 = 169 \rightarrow x = \frac{7 \pm 13}{4} \begin{cases} 5, \\ -\frac{3}{2}. \end{cases}$

  Il denominatore è positivo per valori esterni all'intervallo di estremi $-\frac{3}{2}$ e 5:

  $x < -\frac{3}{2} \vee x > 5$.

- Compiliamo il quadro dei segni.

La disequazione è verificata per:

$x < -\frac{3}{2} \vee 4 < x < 5 \vee x > 6$.

Osservazione. Per brevità, non abbiamo scritto la condizione di esistenza, segnando direttamente nel quadro i valori per cui la frazione non esiste.

		$-\frac{3}{2}$		4		5		6	
N	+		+	0	−		−	0	+
D	+	0	−		−	0	+		+
$\frac{N}{D}$	+	∄	−	0	+	∄	−	0	+

Risolvi le seguenti disequazioni.

276 $\frac{x-3}{x+5} < 0$ $[-5 < x < 3]$

277 $\frac{-6x}{3x+1} \geq 0$ $\left[-\frac{1}{3} < x \leq 0\right]$

278 $\frac{x+3}{5-2x} > 0$ $\left[-3 < x < \frac{5}{2}\right]$

279 $\frac{1-3x}{x+4} > 0$ $\left[-4 < x < \frac{1}{3}\right]$

280 $-\frac{2x+1}{7-x} \leq 0$ $\left[-\frac{1}{2} \leq x < 7\right]$

281 $\frac{-(2-x)-(3+2x)}{1-x} < 0$ $[-5 < x < 1]$

282 $\frac{x^2-4}{x} > 0$ $[-2 < x < 0 \vee x > 2]$

283 $\frac{x^2+x}{2-x} \leq 0$ $[-1 \leq x \leq 0 \vee x > 2]$

289 $\frac{(3x-4)(x+5)}{x^2+3x-10} \geq 0$ $\left[x \leq \frac{4}{3} \wedge x \neq -5 \vee x > 2\right]$

290 $\frac{x^2+x+1}{(x-2)^2} > 0$ $[x \neq 2]$

Risolvi le seguenti disequazioni dopo averle ricondotte alla forma $\frac{A(x)}{B(x)} \lessgtr 0$.

301 $\frac{5x-1}{x-3} \geq 1$ $\left[x \leq -\frac{1}{2} \vee x > 3\right]$

302 $\frac{3x-2}{x} \leq 4$ $[x \leq -2 \vee x > 0]$

303 $\frac{x}{3x+1} \geq 7$ $\left[-\frac{7}{20} \leq x < -\frac{1}{3}\right]$

304 $\frac{1}{x} - \frac{3}{5x} \geq 2$ $\left[0 < x \leq \frac{1}{5}\right]$

305 $-\frac{4}{x+2} + \frac{7}{x+3} > 0$ $\left[-3 < x < -2 \vee x > -\frac{2}{3}\right]$

306 $1 + \frac{2x}{x^2-1} + \frac{x}{x+1} < 0$ $\left[\frac{1}{2} < x < 1\right]$

307 $\frac{1}{2x+3} \geq \frac{4}{x+5}$ $\left[x < -5 \vee -\frac{3}{2} < x \leq -1\right]$

308 $x - \frac{x-2}{x+3} \geq 2$ $[-3 < x \leq -2 \vee x \geq 2]$

309 $1 + \frac{x^2+3x-10}{x^2+1} < 0$ $\left[-3 < x < \frac{3}{2}\right]$

310 $\frac{4x^2-3x+3}{5x^2-3x-2} > -1$ $\left[x < -\frac{2}{5} \vee x > 1\right]$

311 $\frac{x+5}{x-1} + 2 \geq 0$ $[x \leq -1 \vee x > 1]$

312 $\frac{1}{x-3} \geq \frac{5}{x+1}$ $[x < -1 \vee 3 < x \leq 4]$

6 Sistemi di disequazioni

▶ Esercizi a p. 41

Listen to it

To solve a **system of inequalities**, we have to find the values that satisfy all the inequalities involved.

DEFINIZIONE

Un **sistema di disequazioni** è un insieme di più disequazioni nella stessa incognita, per le quali cerchiamo le soluzioni comuni.

Le **soluzioni** del sistema sono quei numeri reali che soddisfano *contemporaneamente* tutte le disequazioni e si ottengono dall'**intersezione** degli insiemi delle soluzioni dalle singole disequazioni.

ESEMPIO

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x^2 - x > 0 \\ 3x - 21 \leq 0. \\ x^2 - 4 < 0 \end{cases}$$

Animazione

Nell'animazione, trovi la risoluzione delle tre disequazioni.

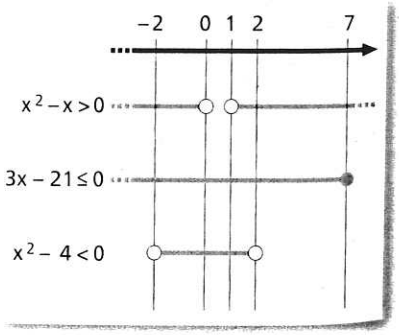
Risolvendo separatamente le disequazioni, otteniamo:

$x^2 - x > 0 \quad \rightarrow \quad x < 0 \ \vee \ x > 1;$

$3x - 21 \leq 0 \quad \rightarrow \quad x \leq 7;$

$x^2 - 4 < 0 \quad \rightarrow \quad -2 < x < 2.$

Rappresentiamo su una retta orientata gli intervalli delle soluzioni. Un pallino pieno indica che il relativo valore è una soluzione, un pallino vuoto che il valore non è una soluzione. Coloriamo la parte che rappresenta le soluzioni comuni alle tre disequazioni.



Le soluzioni del sistema sono $-2 < x < 0 \vee 1 < x < 2$.

▶ Risolvi il sistema $\begin{cases} x^2 - 2x - 3 < 0 \\ x^2 - 6x \geq 0 \end{cases}$ $[-1 < x \leq 0]$

Risolvi i seguenti sistemi di disequazioni intere.

331 ●○ $\begin{cases} x + 1 \leq 0 \\ 2x - 5 < 0 \end{cases}$ $[x \leq -1]$

332 ●○ $\begin{cases} 3(x+2) - 5(x-1) \leq 0 \\ 9 + 3(x-4) > 0 \end{cases}$ $\left[x \geq \frac{11}{2}\right]$

333 ●○ $\begin{cases} 4x + 1 > x + 6 \\ 2x + 3 > -x + 2 \\ 3(x+1) > 1 \end{cases}$ $\left[x > \frac{5}{3}\right]$

334 ●○ $\begin{cases} 3x \geq 1 \\ 6x^2 \leq 5x - 1 \end{cases}$ $\left[\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}\right]$

335 ●○ $\begin{cases} 2x - 7 \geq 0 \\ 2x - 7 < (3x+1)^2 \end{cases}$ $\left[x \geq \frac{7}{2}\right]$

336 ●○ $\begin{cases} x - x^2 > 0 \\ x^2 + 5x + 6 > 0 \end{cases}$ $[0 < x < 1]$

337 ●○ $\begin{cases} x(x+1) < 12 \\ (3-x)(3+x) > 4(x-3) \end{cases}$ $[-4 < x < 3]$

338 ●○ $\begin{cases} x^3 - 1 > x^2 - 2x + 1 \\ \frac{x+4}{2} + \frac{x+18}{3} > \frac{2x-1}{3} \end{cases}$ $[x > 1]$

339 ●○ $\begin{cases} (x+1)^2 \leq 16 \\ x(x-7) \geq 4(5-2x) \end{cases}$ $[x = -5]$

340 ●○ $\begin{cases} x^2 + 3x - 4 < 0 \\ 3(x-2) + 5 \leq 7(x+1) \end{cases}$ $[-2 \leq x < 1]$

341 ●○ $\begin{cases} \frac{1}{2}(x+8) - \frac{5}{2} \leq 3\left(1 - \frac{x}{2}\right) \\ x(2x-1) > 1 \end{cases}$ $\left[x < -\frac{1}{2}\right]$

342 ●○ $\begin{cases} 4x^2 - 4x + 1 \geq 0 \\ \frac{1}{5} + \frac{3x-1}{2} > x - \frac{1}{10} \end{cases}$ $\left[x > \frac{2}{5}\right]$

343 ●○ $\begin{cases} (3x-1)^3 \leq 0 \\ 2x\left(1 + \frac{1}{2}x\right) - 5 > 3 \end{cases}$ $[x < -4]$

344 ●○ $\begin{cases} \sqrt{2}\,x^2 + x - \sqrt{2} < 0 \\ 2x^2 + \sqrt{3}\,x + 1 > 0 \end{cases}$ $\left[-\sqrt{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

345 ●○ $\begin{cases} 2x > \sqrt{8} \\ (x+1)^2 + 1 \leq 2(x+2) \end{cases}$ $[\nexists x \in \mathbb{R}]$

346 ●○ $\begin{cases} x^4 - 13x^2 + 36 > 0 \\ x^2 < -3x \end{cases}$ $[-2 < x < 0]$

TEORIA

IN SINTESI
Piano cartesiano e retta

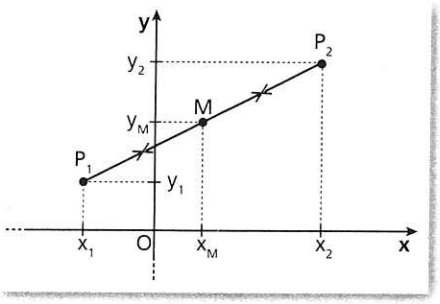
Lunghezza e punto medio di un segmento. Baricentro di un triangolo

- Nel segmento di estremi $P_1(x_1; y_1)$ e $P_2(x_2; y_2)$:
  - il **punto medio** $M(x_M; y_M)$ ha coordinate

    $$x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y_M = \frac{y_1 + y_2}{2};$$

  - la **distanza** fra P_1 e P_2 è:

    $$\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

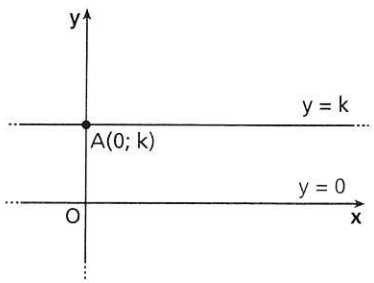


- In un triangolo di vertici $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$, le coordinate del **baricentro** G sono:

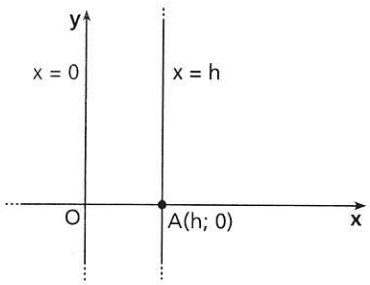
  $$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \qquad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

Equazione di una retta

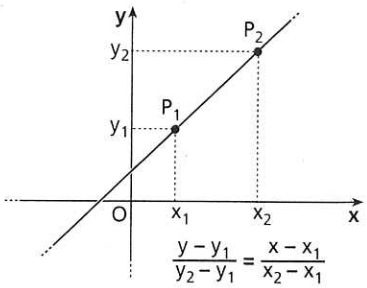
- A ogni **retta** del piano cartesiano corrisponde un'**equazione lineare** in due variabili del tipo $ax + by + c = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e a e b non entrambi nulli, e viceversa.



Retta parallela all'asse x.



Retta parallela all'asse y.



Retta non parallela agli assi passante per i punti $P_1(x_1; y_1)$ e $P_2(x_2; y_2)$.

- Equazione di una retta:
  - in **forma implicita**: $ax + by + c = 0$;
  - in **forma esplicita**:

    $y = mx + q$ (retta non parallela all'asse y).

  q è l'**ordinata all'origine**.
  m è il **coefficiente angolare** della retta:

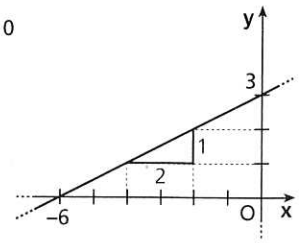
  $$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Forma implicita: $x - 2y + 6 = 0$

Forma esplicita: $y = \frac{1}{2}x + 3$

coefficiente angolare

ordinata all'origine



- **Angolo fra una retta e l'asse x: è acuto se $m > 0$, ottuso se $m < 0$.** Se $m = 0$, la retta è parallela all'asse x. Il coefficiente angolare non esiste se la retta è parallela all'asse y.

- **Equazione di una retta di coefficiente angolare m e passante per $P(x_1; y_1)$**

  $y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$.

- **Equazione di una retta passante per l'origine $O(0; 0)$**

  $y = mx$.

Rette parallele e rette perpendicolari

Due rette (non parallele all'asse y) sono fra loro:

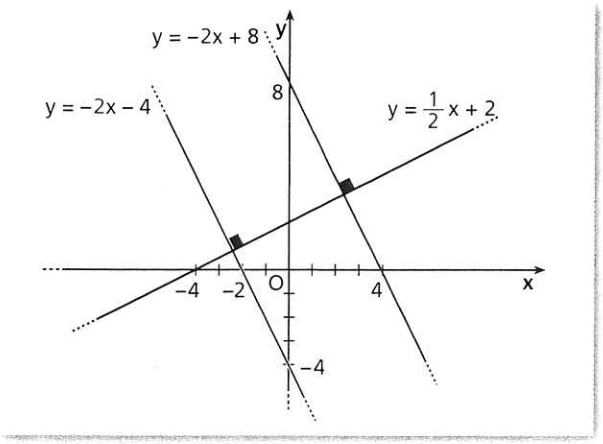
- **parallele** quando hanno lo stesso coefficiente angolare;
- **perpendicolari** quando il prodotto dei loro coefficienti angolari è uguale a -1.

Se le rette r e s, non parallele agli assi, hanno equazioni in forma implicita

$$r: ax + by + c = 0, \quad s: a_1x + b_1y + c_1 = 0,$$

allora:

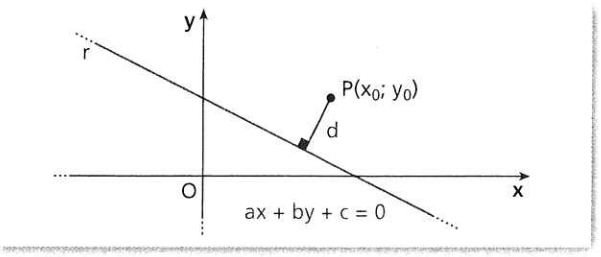
- $\boldsymbol{r \parallel s \leftrightarrow m = m_1 \leftrightarrow ab_1 - a_1b = 0}$;
- $\boldsymbol{r \perp s \leftrightarrow m = -\frac{1}{m_1} \leftrightarrow aa_1 + bb_1 = 0}$.



Distanza di un punto da una retta

Distanza di un punto $P(x_0; y_0)$ da una retta r di equazione $ax + by + c = 0$: misura del segmento che ha per estremi il punto P e il piede della perpendicolare a r passante per P. Si calcola con:

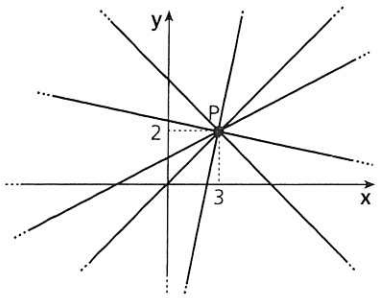
$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$



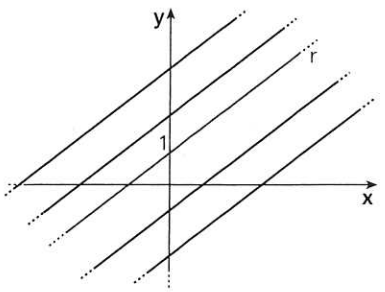
ESEMPIO: La distanza di $P(-1; 2)$ dalla retta di equazione $4x - 3y + 1 = 0$ è:

$$d = \frac{|4(-1) - 3(2) + 1|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{|-9|}{5} = \frac{9}{5}.$$

Fasci di rette



Fascio proprio di rette per un punto P: insieme di tutte le rette del piano passanti per P. P è detto **centro del fascio**.
Esempio: fascio proprio di centro $P(3; 2)$: $y - 2 = m(x - 3) \vee x = 3$.

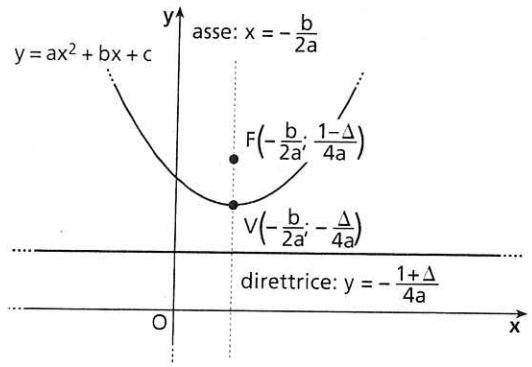


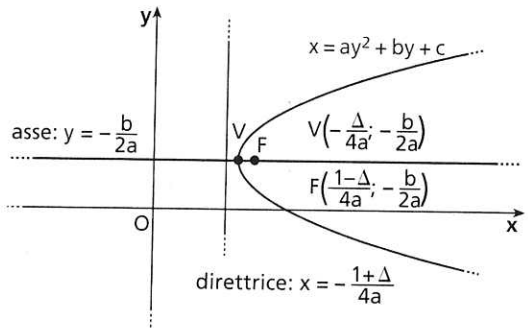
Fascio improprio di rette parallele a una retta r.
Esempio: r: $y = 2x + 1$, fascio improprio: $y = 2x + q$.

TEORIA

IN SINTESI
Parabola

Asse, vertice, fuoco, direttrice



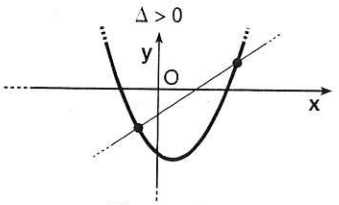


Posizione di una retta rispetto a una parabola

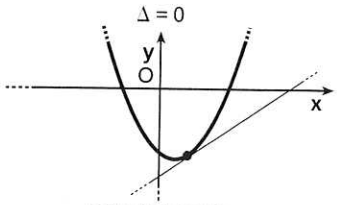
Posizione della retta di equazione $y = mx + q$ (non parallela all'asse y) rispetto alla parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$.

$$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = mx + q \end{cases} \rightarrow ax^2 + (b - m)x + c - q = 0 \rightarrow$$

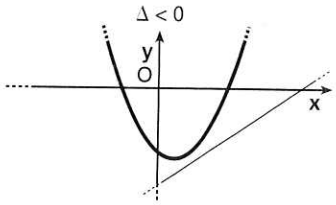
- se $\Delta > 0$, retta **secante**;
- se $\Delta = 0$, retta **tangente**;
- se $\Delta < 0$, retta **esterna**.



retta secante



retta tangente



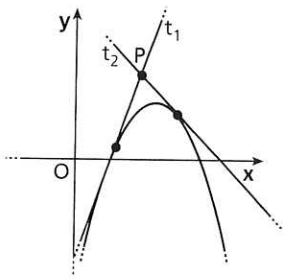
retta esterna

Rette tangenti

- Equazione del fascio di rette per $P(x_0; y_0)$: $y - y_0 = m(x - x_0)$.
- Sistema delle equazioni del fascio di rette e della parabola:

$$\begin{cases} y - y_0 = m(x - x_0) \\ y = ax^2 + bx + c \end{cases}.$$

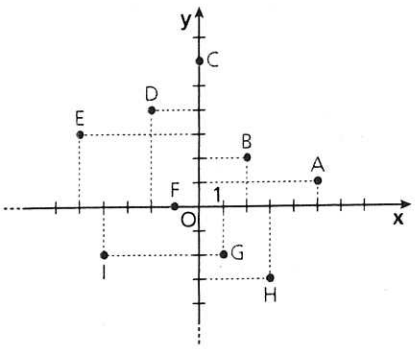
- Condizione di tangenza: $\Delta = 0$ nell'equazione risolvente; se l'equazione nell'incognita m ottenuta:
  - ha soluzioni $m_1 \neq m_2$, le tangenti sono due → P è **esterno** alla parabola, come nella figura;
  - ha soluzioni coincidenti $m_1 = m_2$, la tangente è una sola → P è **sulla** parabola;
  - non ha soluzioni, non esistono tangenti → P è **interno** alla parabola.



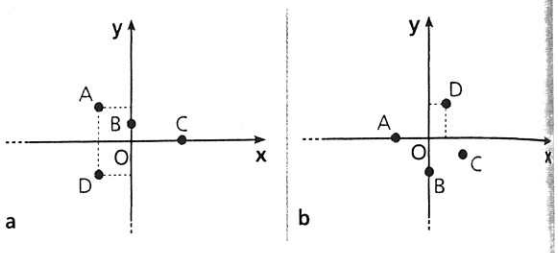
1 Coordinate nel piano

▶ Teoria a p. 166

1 Scrivi le coordinate dei punti indicati in figura.



2 Per ogni figura scrivi quali punti hanno ordinata positiva e quali hanno ascissa negativa.



3 Rappresenta nel piano cartesiano i seguenti punti:

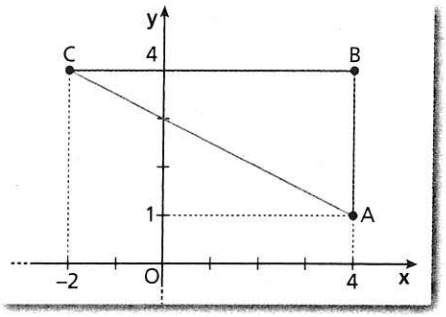
$A(-2; 5)$; $B(-4; -1)$; $C(3; 0)$;
$D(2; -5)$; $E\left(-\frac{5}{2}; 2\right)$.

4 Senza rappresentarli nel piano cartesiano indica a quale quadrante appartengono i seguenti punti:

$A\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$; $B(4; -5)$; $C(1-\sqrt{2}; 1)$;
$D(-6; -2)$.

19 **ESERCIZIO GUIDA** Dati i punti $A(4; 1)$, $B(4; 4)$, $C(-2; 4)$, calcoliamo le distanze $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$.

- I punti $A(4; 1)$ e $B(4; 4)$ hanno la stessa ascissa, quindi:
  $\overline{AB} = |y_A - y_B| = |1-4| = |-3| = 3$.
- I punti $B(4; 4)$ e $C(-2; 4)$ hanno la stessa ordinata, quindi:
  $\overline{BC} = |x_B - x_C| = |4-(-2)| = |4+2| = |6| = 6$.
- I punti $C(-2; 4)$ e $A(4; 1)$ hanno ascisse e ordinate diverse:
  $\overline{CA} = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} = \sqrt{(-2-4)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{36+9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.



$P(x_P; y_P)$; $Q(x_Q; y_Q)$

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_P - x_Q)^2 + (y_P - y_Q)^2}$$

Calcola la distanza fra i punti indicati.

20 $A(2; 1)$, $B(2; 6)$.

21 $A(3; 8)$, $B\left(3; \frac{19}{2}\right)$.

22 $A\left(-4; \frac{4}{3}\right)$, $B\left(-4; \frac{5}{6}\right)$.

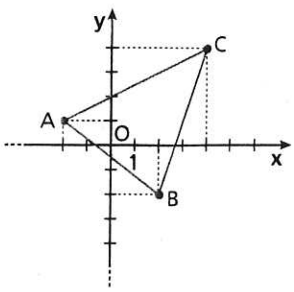
23 $A(-4; -4)$, $B(2; -4)$.

24 $A(-5; 0)$, $B(8; 0)$.

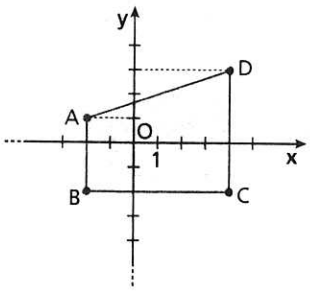
25 $A(2; 5)$, $B(5; 6)$.

LEGGI IL GRAFICO **Calcola il perimetro dei seguenti poligoni.**

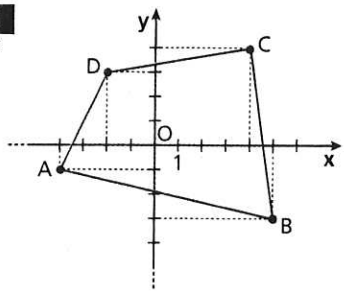
39



40



41



42 Calcola il perimetro del quadrilatero i cui vertici sono $A(-5; 6)$, $B(0; 6)$, $C(2; 2)$, $D(-3; -3)$.

43 Stabilisci se il triangolo ABC di vertici $A(-5; 6)$, $B(-1; 4)$, $C(4; -1)$ è isoscele.

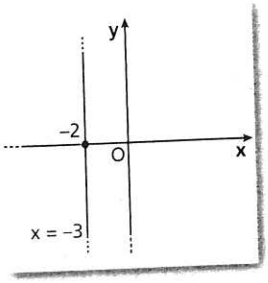
44 Verifica che il triangolo di vertici $A(-3; 0)$, $B(5; 0)$, $C(1; 4\sqrt{3})$ è equilatero.

107 **ESERCIZIO GUIDA** Tracciamo i grafici delle rette di equazioni:

a. $x = -3$; b. $y = 4$; c. $x + 4y - 4 = 0$.

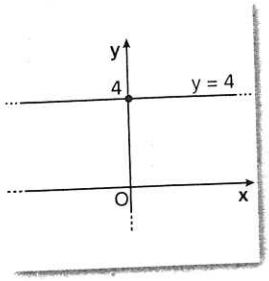
a. $x = -3 \rightarrow$ tutti i punti hanno ascissa -3.

La retta è parallela all'asse y.



b. $y = 4 \rightarrow$ tutti i punti hanno ordinata 4.

La retta è parallela all'asse x.



c. Scriviamo l'equazione in forma esplicita: $y = -\frac{1}{4}x + 1$.

Troviamo alcuni punti che appartengono alla retta assegnando dei valori all'ascissa e calcolando l'ordinata:

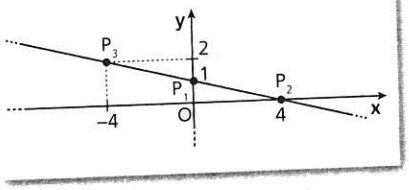
$x = 0 \rightarrow y = -\frac{1}{2} \cdot (0) + 1 = 1 \rightarrow P_1(0; 1)$;

$x = 4 \rightarrow y = -\frac{1}{4} \cdot (4) + 1 = 0 \rightarrow P_2(4; 0)$;

$x = -4 \rightarrow y = -\frac{1}{4} \cdot (-4) + 1 = 2 \rightarrow P_3(-4; 2)$.

Disegniamo i punti e tracciamo la retta.

x	0	4	-4
y	1	0	2



Rappresenta nel piano cartesiano le rette che hanno le seguenti equazioni.

108 $x = -3$; $y = 2$.

109 $2x - 1 = 0$; $y - 5 = 0$.

110 $2x - y = 0$; $4y + 1 = 0$.

111 $y = 2x - 2$; $y = -4$.

112 $y = -\frac{2}{3}x + 1$; $x = \frac{5}{2}$.

113 $2x + 7 = 0$; $4x - y + 4 = 0$.

114 $y = -x + 4$; $y = \frac{1}{4}x - 1$.

115 $x = 4$; $x - y + 3 = 0$.

116 $4x - 3 = 0$; $2x + y - 1 = 0$.

117 $y - 5x = 0$; $1 + x = 0$.

118 $2 - 3x = 0$; $4 + 6y = 0$.

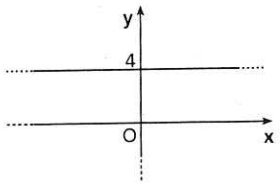
119 $y - x + 1 = 0$; $2x - 3y + 6 = 0$.

ESERCIZ

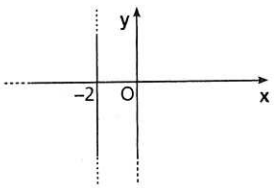
Dal grafico all'equazione

LEGGI IL GRAFICO Per ogni grafico scrivi l'equazione della retta relativa.

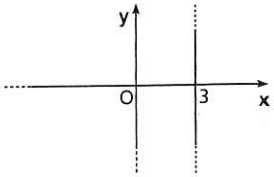
184



185

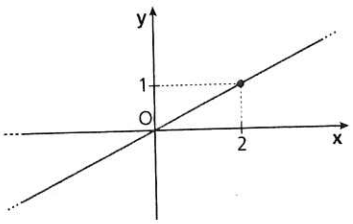


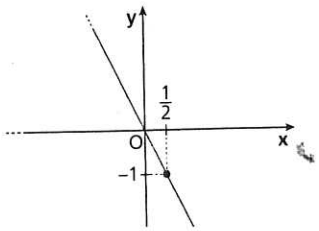
186

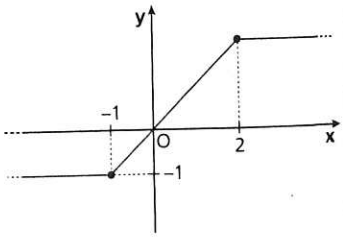


per P e per l'origine.

191 **LEGGI IL GRAFICO** Scrivi le equazioni dei seguenti grafici.







193 **ESERCIZIO GUIDA** Scriviamo l'equazione della retta passante per il punto $P(2; -5)$ e di coefficiente angolare $m = -3$.

Utilizziamo la formula $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Sostituendo, abbiamo:

$$y + 5 = -3(x - 2) \rightarrow y = -3x + 1.$$

Scrivi l'equazione della retta passante per il punto indicato e di coefficiente angolare assegnato e rappresentala.

194 $A(-1; 2)$, $m = -1$.

195 $A\left(3; -\frac{1}{2}\right)$, $m = 3$.

196 $A(-2; -3)$, $m = \frac{1}{2}$.

197 $A(0; -2)$, $m = -5$.

198 $A\left(\frac{4}{3}; \frac{5}{2}\right)$, $m = -\frac{3}{2}$.

199 $A(3; 0)$, $m = 4$.

Coefficiente angolare, note le coordinate di due punti

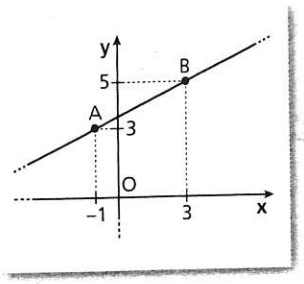
▶ Teoria a p. 172

205 **ESERCIZIO GUIDA** Determiniamo, se è possibile, il coefficiente angolare delle rette AB e CD, conoscendo le coordinate dei punti $A(-1; 3)$, $B(3; 5)$, $C(-3; -2)$ e $D(-3; 1)$.

- Calcoliamo $m(AB)$, applicando la formula

$$m(AB) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} :$$

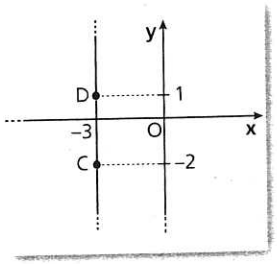
$$m(AB) = \frac{5 - 3}{3 - (-1)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$



- Cerchiamo di calcolare $m(CD)$ allo stesso modo:

$$m(CD) = \frac{1 - (-2)}{-3 - (-3)} = \frac{3}{0};$$

la frazione non esiste, quindi per la retta CD non ha significato parlare di coefficiente angolare; la retta è parallela all'asse y e la sua equazione è $x = -3$.

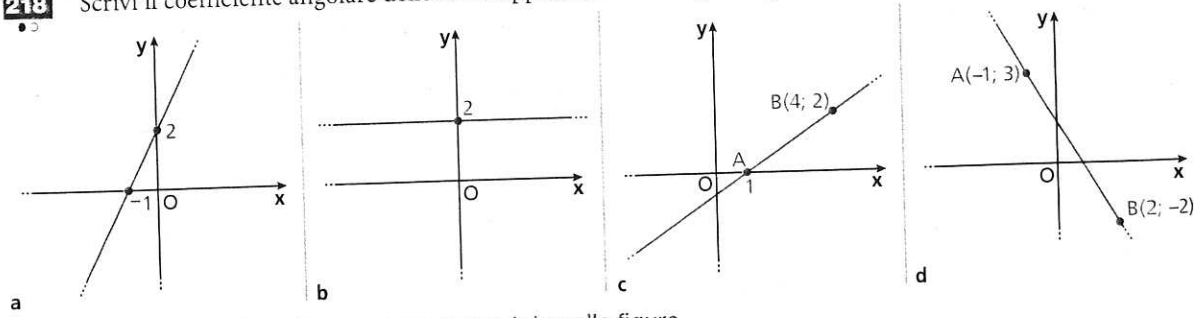


Determina, se è possibile, il coefficiente angolare della retta passante per la coppia di punti indicata.

206 $A(0; 3)$, $B(2; 4)$.

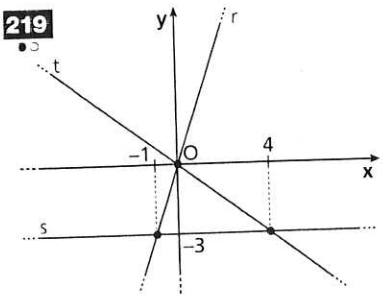
207 $A(1; 5)$, $B(3; 6)$.

218 Scrivi il coefficiente angolare delle rette rappresentate nei seguenti grafici.

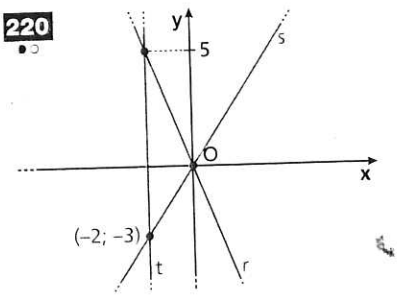


Scrivi le equazioni delle rette r, s e t rappresentate nelle figure.

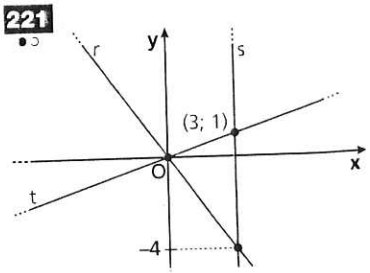
219



220



221



Retta passante per due punti

▶ Teoria a p. 173

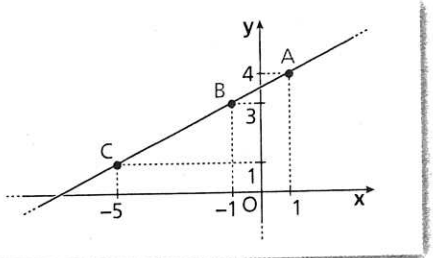
228 **ESERCIZIO GUIDA** Scriviamo l'equazione della retta passante per i punti $A(1; 4)$ e $B(-1; 3)$ e verifichiamo che il punto $C(-5; 1)$ è allineato con A e B.

Applichiamo la formula: $\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}$.

Sostituiamo a $(x_1; y_1)$ le coordinate di A e a $(x_2; y_2)$ le coordinate di B:

$$\frac{y-4}{3-4}=\frac{x-1}{-1-1}\rightarrow -(y-4)=-\frac{1}{2}(x-1)\rightarrow$$

$$y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}.$$



Il punto $C(-5; 1)$ è allineato con A e B perché appartiene alla retta passante per A e B; infatti, le coordinate di C verificano l'equazione della retta:

$$y=\frac{1}{2}(-5)+\frac{7}{2}=1.$$

Scrivi l'equazione della retta passante per i punti A e B.

229 ●○ $A(3; 0)$, $B(0; 5)$.

230 ●○ $A(-5; 0)$, $B(7; -2)$.

231 ●○ $A\left(-\frac{2}{3}; -1\right)$, $B\left(\frac{1}{3}; -2\right)$.

232 ●○ $A(2; -1)$, $B(0; -4)$.

233 ●○ $A(1; 1)$, $B(-1; -1)$.

234 ●○ $A\left(\frac{1}{2}; -6\right)$, $B(2; -3)$.

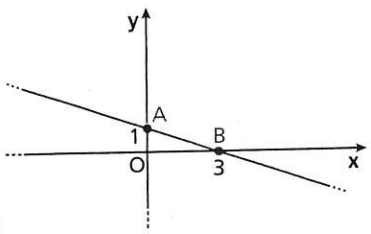
235 ●○ $A(-3; 7)$, $B(6; 2)$.

236 ●○ $A(5; 2)$, $B(-3; 2)$.

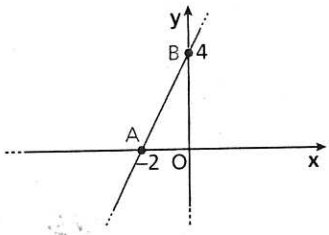
237 ●○ $A(8; 8)$, $B(2; -2)$.

LEGGI IL GRAFICO Scrivi le equazioni delle rette passanti per i punti A e B di ogni figura.

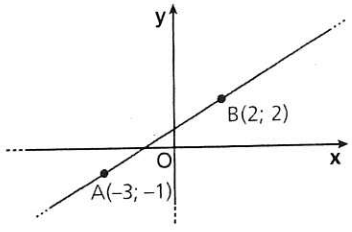
238 ●○



a

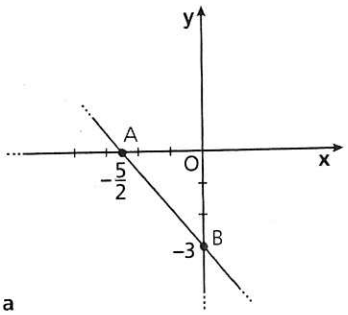


b

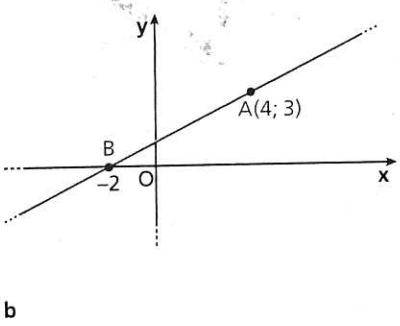


c

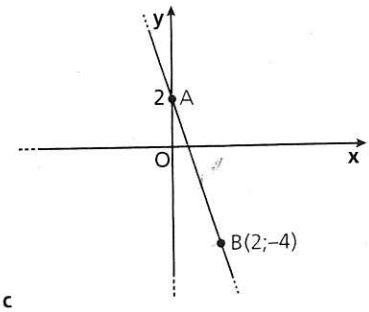
239 ●○



a



b



c

270 **ESERCIZIO GUIDA** Data la retta r di equazione $2y+x-8=0$, determiniamo l'equazione della parallela s passante per $A(1; -1)$.

Scriviamo in forma esplicita l'equazione di r e ricaviamo il suo coefficiente angolare m:

$$y=-\frac{1}{2}x+4,\quad \text{con } m=-\frac{1}{2}.$$

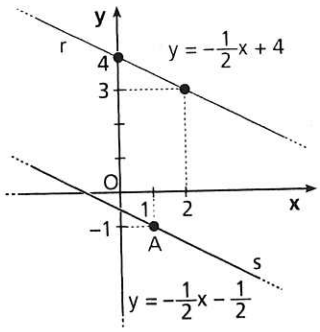
Determiniamo s utilizzando la formula

$$y-y_1=m(x-x_1),$$

$m_s = m_r$

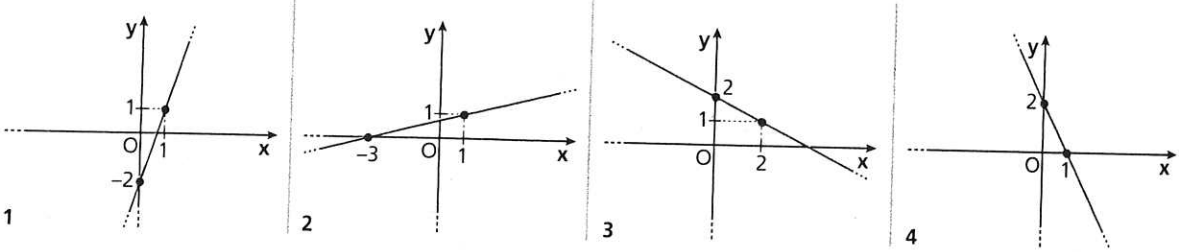
e tenendo conto che una retta **parallela** a r ha lo stesso coefficiente angolare di r.

$$y+1=-\frac{1}{2}(x-1)\quad\rightarrow\quad y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$$



268 **ASSOCIA** a ogni equazione di una retta il grafico della retta a essa parallela.

a. $2x - 8y + 1 = 0$ b. $2x + y = 0$ c. $y = 3x + 1$ d. $4x + 2y + 4 = 0$



286 **ESERCIZIO GUIDA** Determiniamo la posizione reciproca delle rette di equazioni:

$2x + y - 5 = 0, \qquad x - 3y - 6 = 0.$

Stabiliamo se le rette sono parallele verificando se è soddisfatta la condizione di parallelismo per le equazioni in forma implicita: $a \cdot b' - b \cdot a' = 0$.

$2 \cdot (-3) - 1 \cdot 1 = -6 - 1 = -7 \neq 0 \rightarrow$ le rette non sono parallele.

Le rette sono quindi incidenti. Cerchiamo le coordinate del punto di intersezione P mettendo a sistema le due equazioni.

$$\begin{cases} 2x + y - 5 = 0 \\ x - 3y - 6 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -2x + 5 \\ x - 3(-2x + 5) - 6 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -2x + 5 \\ 7x = 21 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 3 \end{cases} \rightarrow P(3; -1)$$

Stabilisci la posizione relativa delle seguenti coppie di rette.

287 $2x + y + 3 = 0, \qquad 3x - y + 2 = 0.$

288 $4x - 3y - 2 = 0, \qquad -8x + 6y - 1 = 0.$

289 $x + 3y - 4 = 0, \qquad 2x + 6y - 8 = 0.$

290 $-x + y - 6 = 0, \qquad x + y - 6 = 0.$

291 $y - 2 = 0, \qquad 3x - 2 = 0.$

292 $y = 3x - 6, \qquad y = 2x - 5.$

ASSOCIA a ciascuna retta r, della prima riga, la retta s nella seconda riga, perpendicolare a r.

a. $5x + 2y - 6 = 0$ b. $5x - 2y = 5$ c. $2x + 5y - 3 = 0$ d. $y = 5x - 1$

1. $2x + 5y - 2 = 0$ 2. $5y - 2x = 0$ 3. $2y = 5x + 3$ 4. $5y = 1 - x$

UN ESEMPIO

317 **ESERCIZIO GUIDA** Determiniamo l'equazione della retta s perpendicolare alla retta r di equazione $3x - 2y + 2 = 0$ e passante per $P(3; 2)$.

Scriviamo in forma esplicita l'equazione di r e ricaviamo il suo coefficiente angolare m_r:

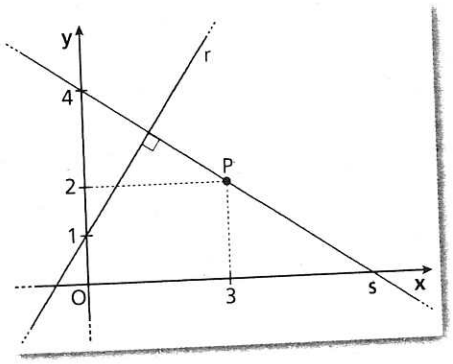
$$y = \frac{3}{2}x + 1, \quad \text{con } m_r = \frac{3}{2}.$$

Il coefficiente angolare di s è:

$$m_s = -\frac{1}{m_r} \rightarrow m_s = -\frac{2}{3}.$$

L'equazione di s è:

$$y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 3) \rightarrow y = -\frac{2}{3}x + 4.$$



ESERCIZI

Per ciascuna retta, scrivi l'equazione della retta perpendicolare passante per il punto A.

318 $2x + 4y - 1 = 0, \qquad A(-4; 3).$ $[2x - y + 11 = 0]$

319 $4x + y + 2 = 0, \qquad A(-8; 1).$ $[x - 4y + 12 = 0]$

320 $y = \frac{x}{2} + 2, \qquad A(-1; 3).$ $[2x + y - 1 = 0]$

Dall'equazione $y = ax^2 + bx + c$ al grafico

Teoria a p. 224

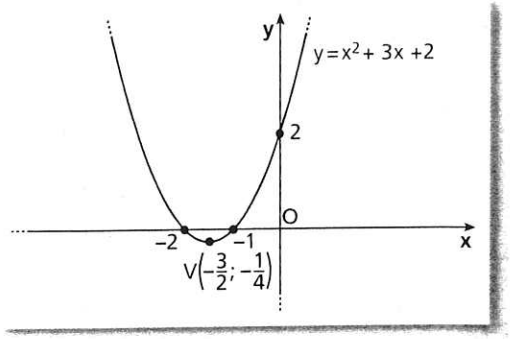
49 **ESERCIZIO GUIDA** Disegniamo la parabola di equazione $y = x^2 + 3x + 2$.

- La concavità è rivolta verso l'alto poiché $a = 1 > 0$.
- Troviamo le coordinate del vertice.

$$x_V = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2}$$

$$y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{9-8}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$\rightarrow V\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$$



- Troviamo le intersezioni con gli assi.

$$x = 0 \rightarrow y = 2 \rightarrow (0; 2)$$

$$y = 0 \rightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \begin{cases} x_1 = -1 \rightarrow (-1; 0) \\ x_2 = -2 \rightarrow (-2; 0) \end{cases}$$

Disegna le parabole che hanno le seguenti equazioni.

50 $y = -x^2 + 3x + 4$

51 $y = -3x^2 + 3$

52 $y = x^2 - x$

56 $y = -x^2 + \frac{1}{4}x$

57 $y = \frac{3}{2}x^2 - x$

58 $2y = -x^2 + 1$

62 $y = x(x-2)$

63 $y = 3x^2 - 2x + 1$

64 $y = -\frac{1}{3}x^2 - 3$

151 **ESERCIZIO GUIDA** Determiniamo, se ci sono, le intersezioni tra la parabola di equazione $y = x^2 + 4x - 1$ e le rette r e s rispettivamente di equazioni $y = 3x + 1$ e $y = -2x - 10$, e disegniamo il grafico.

Risolviamo i seguenti sistemi per ottenere le intersezioni rispettivamente con r e con s.

- $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = x^2 + 4x - 1 \end{cases}$

Per confronto, otteniamo:

$x^2 + 4x - 1 = 3x + 1 \rightarrow x^2 + x - 2 = 0; \quad \Delta = 1 + 8 = 9 > 0 \rightarrow r$ è secante.

$$x = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} x_1 = 1 \rightarrow y_1 = 4 \\ x_2 = -2 \rightarrow y_2 = -5 \end{cases}$$

I punti di intersezione sono $A(1; 4)$ e $B(-2; -5)$.

- $\begin{cases} y = -2x - 10 \\ y = x^2 + 4x - 1 \end{cases}$

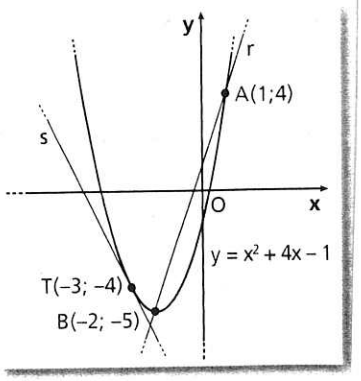
Per confronto, otteniamo:

$x^2 + 4x - 1 = -2x - 10 \rightarrow x^2 + 6x + 9 = 0;$

$\Delta = 9 - 9 = 0 \rightarrow s$ è tangente.

$x = -3 \rightarrow y = -4$

Il punto di tangenza è $T(-3; -4)$.



Determina, se esistono, i punti di intersezione tra la retta e la parabola di cui sono date le equazioni e disegn il grafico corrispondente.

152 $y = -x, \quad y = x^2 - x - 1.$

153 $y = 2x + 5, \quad y = x^2 + 2x + 5.$

154 $y = -8, \quad y = x^2 + 8.$

155 $y = x + 4, \quad x = y^2 + 2y + 4.$

156 $x = 2, \quad x = -2y^2 - 3y + 1.$

157 $y = 5x + 2, \quad y = 3x^2 - 4x + 2.$

158 $x = -4y + 4, \quad x = y^2 - 6y + 5.$

Le proprietà delle potenze

Definizione $a, b \in \mathbb{R}^+$, $x, y \in \mathbb{R}$		Esempio
I.	Prodotto di potenze di uguale base: $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$	$10^{4\sqrt{3}} \cdot 10^{-\sqrt{27}} = 10^{\sqrt{3}}$
II.	Quoziente di potenze di uguale base: $a^x : a^y = a^{x-y}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^4 : \left(\frac{1}{3}\right)^{-5} = \left(\frac{1}{3}\right)^9$
III.	Potenza di potenza: $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$	$(6^{-\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} = 6^{-\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = 6^{-2} = \frac{1}{36}$
IV.	Prodotto di potenze di uguale esponente: $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$	$\left(\frac{2}{3}\right)^\pi \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^\pi = \left(\frac{1}{2}\right)^\pi$
V.	Quoziente di potenze di uguale esponente: $a^x : b^x = (a : b)^x$	$\left(\frac{81}{5}\right)^{\frac{1}{3}} : \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{3}} = 3$

2 Funzione esponenziale

▶ Esercizi a p. 137

ıziona?

DEFINIZIONE

Una **funzione esponenziale** è una funzione del tipo:

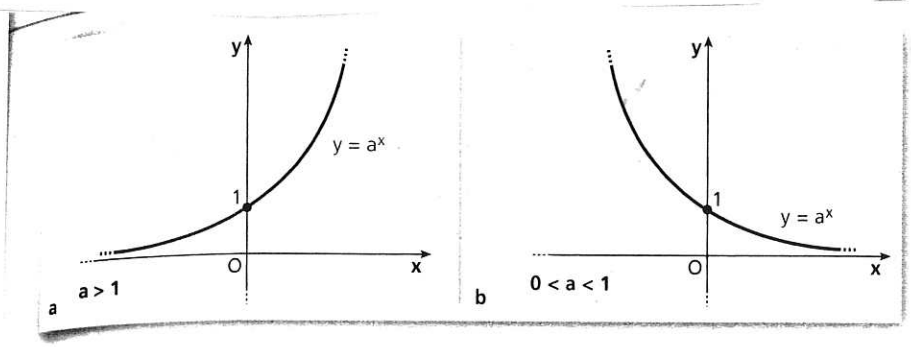
$$y = a^x, \text{ con } a \in \mathbb{R}^+.$$

Abbiamo una diversa funzione esponenziale per ogni valore $a > 0$ che scegliamo.

Se $a = 1$, la funzione è la funzione costante $y = 1$, perché $1^x = 1$ per qualunque valore di x. Il suo grafico è quindi una retta parallela all'asse x, passante per $(0; 1)$.

Se $a \neq 1$, distinguiamo i due casi $a > 1$ e $0 < a < 1$.

Nella figura seguente ci sono i grafici di $y = a^x$ nei due casi.



Dai grafici notiamo **proprietà comuni nei due casi**:

- il dominio è $\mathbb{R}$;
- il grafico non interseca l'asse x e si trova interamente nei quadranti con ordinata positiva, cioè il codominio è $\mathbb{R}^+$;
- il grafico interseca l'asse y in $(0; 1)$;
- la funzione è biunivoca.

Se $a > 1$:

- la funzione è crescente;
- per esponenti negativi decrescenti, le potenze si avvicinano sempre più a 0.

Se $0 < a < 1$:

- la funzione è decrescente;
- per esponenti positivi crescenti, le potenze si avvicinano sempre più a 0.

Funzione esponenziale con base *e*

In matematica è spesso utilizzata, per le sue particolari proprietà che studieremo in seguito, la funzione esponenziale $y = e^x$, dove e è un particolare numero irrazionale, il numero di Nepero: $e = 2{,}71828182845\ldots$

3 Equazioni esponenziali

▶ Esercizi a p.

DEFINIZIONE

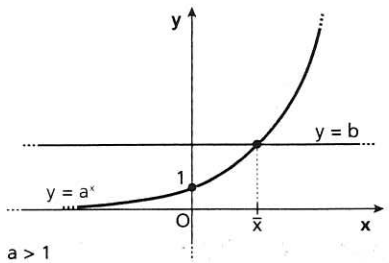
Un'**equazione esponenziale** contiene almeno una potenza con l'incognita nell'esponente.

Per esempio, $2^x = 5$ è un'equazione esponenziale, mentre $x^{\sqrt{5}} = 2$ non lo è.

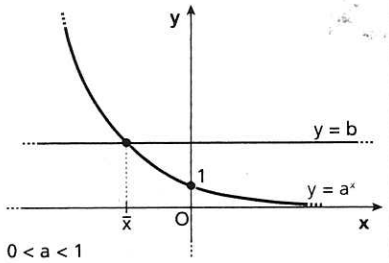
Consideriamo l'equazione esponenziale: $\boldsymbol{a^x = b}$, con $\boldsymbol{a > 0}$.

Escludendo il caso particolare in cui $a = 1$, per risolvere $a^x = b$, distinguiamo due casi.

- **Se $\boldsymbol{b \leq 0}$**, l'equazione $a^x = b$ è *impossibile*, perché a^x non è mai negativo o nullo. Per esempio, l'equazione $2^x = -4$ non è verificata per alcun valore di x.
- **Se $\boldsymbol{b > 0}$**, l'equazione $a^x = b$ ha sempre *una e una sola soluzione*. Infatti, se interpretiamo graficamente l'equazione, considerando il grafico di $y = a^x$ e quello di $y = b$, la soluzione $\bar{x}$ è l'ascissa del punto di intersezione dei due grafici, che è una e una sola, perché la funzione $y = a^x$ è biunivoca.



a > 1



0 < a < 1

Non esiste un metodo generale per la risoluzione delle equazioni esponenziali. Negli esercizi, noi considereremo solo alcuni casi.

È possibile risolvere l'equazione **in modo immediato**, se si riescono a scrivere a e b come potenze aventi la stessa base.

ESEMPIO

Risolviamo $25^x = 125$.

Scriviamo l'equazione utilizzando potenze di 5:

$$(5^2)^x = 5^3 \rightarrow 5^{2x} = 5^3.$$

Due potenze con la stessa base sono uguali se e solo se sono uguali anche gli esponenti, quindi:

$$5^{2x} = 5^3 \quad \rightarrow \quad 2x = 3 \quad \rightarrow \quad x = \frac{3}{2}.$$

4 Disequazioni esponenziali

▶ Esercizi a p. 141

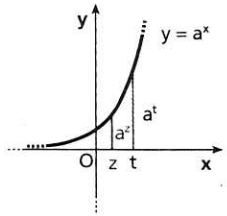
DEFINIZIONE

Una **disequazione esponenziale** contiene almeno una potenza con l'incognita nell'esponente.

Per le disequazioni esponenziali valgono osservazioni analoghe a quelle fatte sulle equazioni esponenziali, purché ricordiamo che:

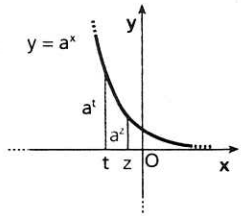
Se $a > 1$:

$$\boxed{a^t > a^z \quad \leftrightarrow \quad t > z.}$$



Se $0 < a < 1$:

$$\boxed{a^t > a^z \quad \leftrightarrow \quad t < z.}$$



ESEMPIO Animazione

1. Risolviamo la disequazione $32^x > 128$.
   Scriviamo la disequazione utilizzando potenze di 2:
   $$(2^5)^x > 2^7 \quad \rightarrow \quad 2^{5x} > 2^7.$$
   Poiché le potenze hanno **base maggiore di 1**, dalla disuguaglianza precedente otteniamo una disuguaglianza fra gli esponenti **di ugual verso**:
   $$2^{5x} > 2^7 \quad \rightarrow \quad 5x > 7 \quad \rightarrow \quad x > \frac{7}{5}.$$

2. Risolviamo la disequazione $\left(\frac{1}{8}\right)^x > \frac{1}{4}$.
   Scriviamo la disequazione utilizzando potenze di $\frac{1}{2}$:
   $$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} > \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$
   Poiché le potenze hanno **base minore di 1**, dalla disuguaglianza precedente otteniamo una disuguaglianza fra gli esponenti **di verso contrario**:
   $$\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} > \left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad \rightarrow \quad 3x < 2 \quad \rightarrow \quad x < \frac{2}{3}.$$

EQUAZIONI ESPONENZIALI

61 **ESERCIZIO GUIDA** Risolviamo: a. $3^x = \frac{\sqrt{3}}{9}$; b. $75 \cdot 25^{x-1} - 5^{2x+1} = -50$.

a. $3^x = \frac{\sqrt{3}}{9}$) $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$

$3^x = \frac{3^{\frac{1}{2}}}{3^2}$) seconda proprietà delle potenze

$3^x = 3^{\frac{1}{2}-2}$

$3^x = 3^{-\frac{3}{2}}$) potenze con la stessa base: uguagliamo gli esponenti

$x = -\frac{3}{2}$

b. $75 \cdot 25^{x-1} - 5^{2x+1} = -50$) proprietà delle potenze

$^{3}\cancel{75} \cdot \frac{5^{2x}}{\cancel{25}} - 5 \cdot 5^{2x} = -50$) raccogliamo 5^{2x}

$5^{2x}(3-5) = -50$

$5^{2x} = 5^2$) uguagliamo gli esponenti

$2x = 2 \rightarrow x = 1$

Risolvi le seguenti equazioni esponenziali.

62 ●○ $3^{x+1} = 27$ [2]

63 ●○ $5^{2x} = \frac{1}{25}$ [−1]

64 ●○ AL VOLO $4 \cdot 3^x = 4$

65 ●○ AL VOLO $7^{x+2} + 7 = 0$

66 ●○ $2^x = 16 \cdot \sqrt{2}$ $\left[\frac{9}{2}\right]$

67 ●○ $5^x = \frac{1}{25} \cdot \sqrt{5}$ $\left[\frac{3}{2}\right]$

68 ●○ $4^x = 2 \cdot \sqrt{2}$ $\left[\frac{3}{4}\right]$

69 ●○ $2^x = 8 \cdot \sqrt{2}$ $\left[\frac{7}{2}\right]$

70 ●○ $\sqrt[3]{5^x} = 25$ [6]

71 ●○ $4^{x+2} = 1 - \sqrt{2}$ [imp.]

72 ●○ $2^x + 9 \cdot 2^x = 40$ [2]

73 ●○ $3 \cdot 4^x + \frac{7}{4} \cdot 4^x = 19 \cdot \sqrt{2}$ $\left[\frac{5}{4}\right]$

74 ●○ $5 \cdot 2^x + 2^{x-3} = 328$ [6]

75 ●○ $3 \cdot 5^x + 5^{x+1} = 8 \cdot 5^3$ [3]

76 ●● $5^x \cdot 25^x = \frac{1}{5}$ $\left[-\frac{1}{3}\right]$

Risolvi le seguenti equazioni esponenziali utilizzando un'incognita ausiliaria.

87 ●○ $4^x = 2^x - 2$ [impossibile]

88 ●○ $8 + 2^{x+1} = 2^{2x}$ [2]

89 ●○ $9^x - 3 = 2 \cdot 3^x$ [1]

90 ●○ $3^{2x} - 9 \cdot 3^x + 3 = \frac{1}{3} \cdot 3^x$ [−1; 2]

91 ●○ $5^{2x} - 5^x = 5^{x-2} - \frac{1}{25}$ [0; −2]

92 ●○ $\frac{2}{3^x - 1} = \frac{1}{3^x - 5}$ [2]

93 ●○ $2^x + 8 = \frac{1}{4} + 2^{1-x}$ [−2]

94 ●○ $10^x + 10^{2-x} = 101$ [0; 2]

95 ●○ $2^{x+3} + 4^{x+1} = 320$ [3]

96 ●○ $2^{x+1} + 2^{3-x} = 17$ [−1; 3]

97 ●● $3^x + 3^{1-x} = 4$ [0; 1]

98 ●● $2^x - \sqrt{2} = 4 - 2^{\frac{5}{2}-x}$ $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$

99 ●● $(3^x - 5)^2 + 1 = 3^x - 5$ [impossibile]

100 ●● $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - \frac{12}{2^x} + 32 = 0$ [−2; −3]

101 ●● $-2 \cdot 5^{x+2} + 25^{x+1} = 375$ [1]

102 ●● $9^x + 9 = 10 \cdot 3^x$ [0; 2]

103 ●● $2^{4x+3} + 2 = 17 \cdot 4^x$ $\left[-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right]$

104 ●● $5^{x+2} - 4 \cdot 5^{1-x} - 30 = -5^{2-x}$ [0; −1]

105 ●● $3^x - 3^{-1} = 3(2 \cdot 3^{-x} + 8 \cdot 3^{-1})$ [2]

Risolvi le seguenti equazioni esponenziali applicando il metodo opportuno.

106 ●○ $5^{x+6} = 125$ [−3]

107 ●○ $9^x - 3^x = 6$ [1]

108 ●○ $4^x = 3 \cdot 2^x + 4$ [2]

109 ●○ $2^x = 2^{x-1} + 2^{x+3}$ [2]

110 ●○ $5^x + 125^{\frac{x}{3}} = 250$ [3]

111 ●○ $3^{2+x} + 3^x = 90$ [2]

112 ●○ $5^{2x-1} = 7^{2x-1}$ $\left[\frac{1}{2}\right]$

113 ●○ $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} - 4 \cdot 64^x = 0$ $\left[-\frac{5}{7}\right]$

114 ●○ $7^x \cdot \sqrt{7^x} = \frac{1}{343}$ [−2]

115 ●○ $2 \cdot 3^{2x} - 2 \cdot 3^{x+2} - 8 = 1 - 3^x$ [2]

116 ●○ $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-3} = \left(\frac{16}{9}\right)^{1+2x}$ $\left[\frac{1}{5}\right]$

117 ●● $2^{2x-1} \cdot 3^x = \frac{1}{2 \cdot 3^x}$ [0]

118 ●● $3^{x+1} - \frac{1}{3^x} - 2 = 0$ [0]

119 ●● $5^{x+1} \cdot 25^x = \sqrt{5^{1-x}} \cdot \sqrt{125}$ $\left[\frac{2}{7}\right]$

4 Disequazioni esponenziali

▶ Teori

I due membri si possono scrivere come potenze di uguale base

120 **ESERCIZIO GUIDA** Risolviamo le seguenti disequazioni: a. $250 \cdot 5^{\frac{x}{3}} > 2$; b. $\left(\frac{1}{27}\right)^x > \frac{1}{81}$.

a. $250 \cdot 5^{\frac{x}{3}} > 2 \rightarrow 5^{\frac{x}{3}} > \frac{\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{250}_{125}} \rightarrow 5^{\frac{x}{3}} > 5^{-3} \rightarrow \frac{x}{3} > -3 \rightarrow x > -9$

dividiamo entrambi i membri per 250

la base è 5 > 1

ESERCIZI

b. $\left(\frac{1}{27}\right)^x > \frac{1}{81} \rightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{3x} > \left(\frac{1}{3}\right)^4 \rightarrow 3x < 4 \rightarrow x < \frac{4}{3}$

scriviamo $\frac{1}{27}$ e $\frac{1}{81}$ come potenze di $\frac{1}{3}$

la base è $\frac{1}{3} < 1$

Risolvi le seguenti disequazioni esponenziali i cui membri sono riconducibili a potenze di uguale base.

121 $4^x \leq 32$ $\left[x \leq \frac{5}{2}\right]$

122 $\left(\frac{3}{2}\right)^x < \frac{27}{8}$ $[x < 3]$

123 $3^{2x} \geq 81$ $[x \geq 2]$

124 $3^{2x+2} < \frac{1}{3}$ $\left[x < -\frac{3}{2}\right]$

125 $7^{x+2} > 49$ $[x > 0]$

126 $0,1^x \leq 100$ $[x \geq -2]$

127 $100^x < 0,001$ $\left[x < -\frac{3}{2}\right]$

128 $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+3} < \left(\frac{5}{2}\right)^{x-2}$ $\left[x > -\frac{1}{2}\right]$

129 $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1} < 625$ $\left[x > -\frac{5}{2}\right]$

130 $2^x \cdot 3^{x+1} \leq \frac{6^{3x}}{2}$ $\left[x \geq \frac{1}{2}\right]$

131 $\frac{2^x \cdot 8}{4^x} > \frac{16^{-x}}{8}$ $[x > -2]$

Utilizziamo un'incognita ausiliaria

132 **ESERCIZIO GUIDA** Risolviamo la disequazione $3^x - 2 \cdot 3^{2-x} < 7$.

$$3^x - 2 \cdot 3^{2-x} < 7 \rightarrow 3^x - 2 \cdot \frac{9}{3^x} < 7 \rightarrow z - \frac{18}{z} < 7 \rightarrow \frac{z^2 - 7z - 18}{z} < 0 \rightarrow z^2 - 7z - 18 < 0 \rightarrow$$

$z = 3^x$

$z > 0$ perché $z = 3^x$

$$-2 < z < 9 \rightarrow \begin{cases} 3^x > -2 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \\ 3^x < 3^2 \rightarrow x < 2 \end{cases}$$

La soluzione della disequazione data è $x < 2$.

Risolvi le seguenti disequazioni esponenziali con l'uso di un'incognita ausiliaria.

133 $2 \cdot 3^{-x} - 3^x \geq 1$ $[x \leq 0]$

134 $7^x - 6 > 7^{1-x}$ $[x > 1]$

138 $(0,01)^x - 7(0,1)^x - 30 \geq 0$ $[x \leq -1]$

139 $25\left(\frac{1}{5}\right)^x + 5 - 2\left(\frac{1}{5}\right)^{-x} \leq 0$ $[x \geq 1]$

Risolvi le seguenti disequazioni applicando il metodo opportuno.

143 $\frac{2^x - 4}{1 - 3^x} > 0$ $[0 < x < 2]$

144 $\frac{4 - 8^x}{3^x + 9} \leq 0$ $\left[x \geq \frac{2}{3}\right]$

145 $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1} < 625$ $\left[x > -\frac{5}{2}\right]$

146 $45 \cdot 2^{2x-2} < -35 \cdot 4^{x-1}$ [impossibile]

148 $\left(\frac{1}{4}\right)^x - 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x - 8 \geq 0$ $[x \leq -3]$

149 $4 \cdot 2^{3x} - 4^{x+2} < 0$ $[x < 2]$

150 $\frac{5^x - 125}{(1 - 2^x)(3^x - 3)} \geq 0$ $[x < 0 \vee 1 < x \leq 3]$

151 $72 \cdot 2^{2x} > 4 \cdot 9^x \cdot 27$ $\left[x < -\frac{1}{2}\right]$

ESERCIZI

7. LOGARITMI

La definizione di logaritmo

Sappiamo che l'equazione esponenziale $a^x = b$, con $a > 0$, $a \neq 1$ e $b > 0$, ammette una e una sola soluzione. A tale valore si dà il nome di logaritmo in base a di b e si scrive: $x = \log_a b$.

Per esempio, la soluzione dell'equazione $2^x = 7$ è $x = \log_2 7$.

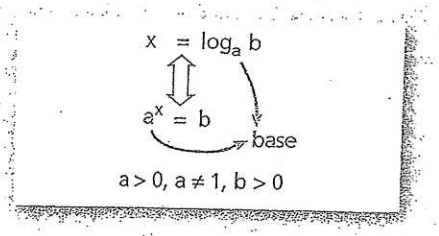
Non esiste $\log_a 0$ né il logaritmo di un numero negativo: per definizione la base e l'argomento devono essere positivi.

Deve essere $a \neq 1$ perché, come abbiamo visto, l'equazione $1^x = b$ è impossibile o indeterminata.

DEFINIZIONE

Logaritmo in base a di b

Dati due numeri reali positivi a e b, con $a \neq 1$, si chiama logaritmo in base a di b l'esponente x da assegnare alla base a per ottenere il numero b.



Il numero b viene detto **argomento** del logaritmo.
In genere, la base 10 si sottintende. Per esempio, $\log_{10} 5$ si scrive $\log 5$.
Dalla definizione possiamo osservare che il logaritmo permette di scrivere in modo diverso la relazione che esiste in una potenza fra base, esponente e risultato.
Per esempio, le due scritture $5^2 = 25$ e $2 = \log_5 25$ sono equivalenti.
Dalla definizione, supponendo $a, b > 0$ e $a \neq 1$, si ricava:

$\log_a 1 = 0$, perché $a^0 = 1$;

$\log_a a = 1$, perché $a^1 = a$;

$a^{\log_a b} = b$, perché $\log_a b$ è l'esponente a cui elevare a per ottenere b.

Vale il seguente teorema. All'aumentare dell'argomento b (reale positivo), il logaritmo $\log_a b$:
- aumenta, se $a > 1$;
- diminuisce, se $0 < a < 1$.

Osserviamo poi che se due numeri positivi sono uguali, anche i loro logaritmi, rispetto a una stessa base, sono uguali e viceversa:

$$x = y \Leftrightarrow \log_a x = \log_a y.$$

Le proprietà dei logaritmi

Le proprietà fondamentali dei logaritmi sono tre, valide qualunque sia la base, purché positiva e diversa da 1.

Negli enunciati delle proprietà sottintendiamo che i logaritmi sono riferiti a una stessa base.

PROPRIETÀ

Logaritmo di un prodotto

Il logaritmo del prodotto di due numeri positivi è uguale alla *somma* dei logaritmi dei singoli fattori:

$$\log_a (b \cdot c) = \log_a b + \log_a c \quad (b > 0, c > 0).$$

Puoi verificare questa uguaglianza e quelle seguenti applicando la definizione di logaritmo.

ESEMPIO

$$\log_5 (5 \cdot 125) = \log_5 5 + \log_5 125.$$

PROPRIETÀ

Logaritmo di un quoziente

Il logaritmo del quoziente di due numeri positivi è uguale alla *differenza* fra il logaritmo del dividendo e il logaritmo del divisore:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c \quad (b > 0, c > 0).$$

ESEMPIO

$$\log_2\left(\frac{256}{8}\right) = \log_2 256 - \log_2 8.$$

PROPRIETÀ

Logaritmo di una potenza

Il logaritmo della potenza di un numero positivo elevato a un esponente reale è uguale al prodotto di tale esponente per il logaritmo di quel numero positivo:

$$\log_a b^n = n \cdot \log_a b \quad (b > 0).$$

Poiché $\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$, si può applicare la terza proprietà anche nel caso del logaritmo di una radice:

$$\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n}\log_a b$$

$(b > 0)$.

ESEMPIO

$$\log_3 9^4 = 4 \cdot \log_3 9.$$

La formula del cambiamento di base

Le calcolatrici sono spesso costruite per calcolare i logaritmi in due sole basi: la base 10 e la base e. Il numero e è detto **numero di Nepero** ed è un numero irrazionale, il cui valore, approssimato a cinque cifre decimali, è 2,71828.

e si può ottenere studiando i numeri del tipo $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, con $n \in \mathbb{N}$. Attribuendo a n valori crescenti, cioè 1, 2, ..., la successione dei numeri di quel tipo si avvicina a un numero irrazionale che viene chiamato e.

Per distinguere i logaritmi nelle due basi si usano le seguenti notazioni:

log x indica il $\log_{10} x$, detto anche **logaritmo decimale**;

ln x indica il $\log_e x$, detto anche **logaritmo naturale o neperiano**.

Per il calcolo di logaritmi con base diversa è utile la seguente proprietà.

PROPRIETÀ

Cambiamento di base nei logaritmi

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \qquad a > 0, b > 0, c > 0 \quad a \neq 1, c \neq 1$$

Per esempio:

$$\log_3 7 = \frac{\ln 7}{\ln 3}.$$

La funzione logaritmica

DEFINIZIONE

Funzione logaritmica

Si chiama funzione logaritmica ogni funzione del tipo:

$$y = \log_a x, \quad \text{con } a > 0 \text{ e } a \neq 1.$$

Poiché l'argomento del logaritmo deve essere positivo, il dominio della funzione è $\mathbb{R}^+$; si dimostra che la funzione assume tutti i valori reali, quindi il codominio è $\mathbb{R}$.

TEORIA

Video

Calcolo approssimato dei logaritmi

- Come possiamo calcolare log 2 senza calcolatrice?
- E log 2000?

7 Funzione logaritmica

▶ Esercizi a p. 148

DEFINIZIONE

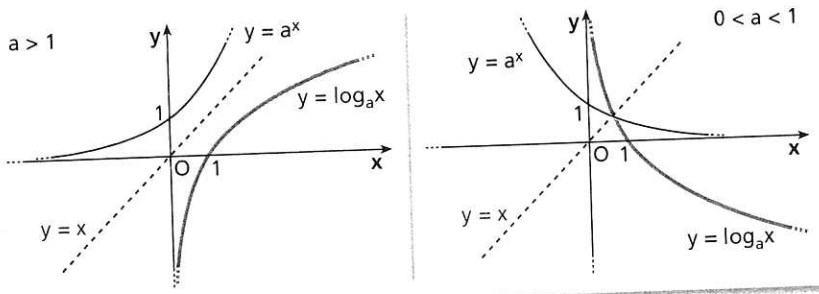
Una **funzione logaritmica** è del tipo:

$y = \log_a x, \quad \text{con } a > 0 \text{ e } a \neq 1.$

Poiché l'argomento del logaritmo deve essere positivo, il dominio della funzione è $\mathbb{R}^+$.

Grafico della funzione logaritmica

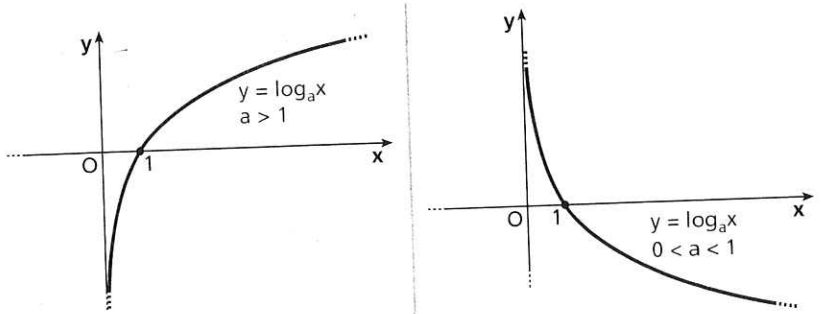
Deduciamo il grafico della funzione logaritmica da quello della funzione esponenziale. La funzione $y = a^x$ è una funzione biunivoca da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}^+$, quindi è invertibile. Ricaviamo x in funzione di y. Applicando la definizione di logaritmo, otteniamo: $x = \log_a y$. Indicando la variabile indipendente con x e la variabile dipendente con y, otteniamo: $y = \log_a x$.
Pertanto, la funzione logaritmo è la funzione inversa della funzione esponenziale. I grafici delle due funzioni sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.



Proprietà della funzione logaritmica

Osservando i grafici che seguono e tenendo conto che la funzione logaritmica è l'inversa di quella esponenziale, concludiamo che $y = \log_a x$, sia per $a > 1$ sia per $0 < a < 1$:

- ha dominio $\mathbb{R}^+$, come già detto, e codominio $\mathbb{R}$;
- è una funzione biunivoca, sempre crescente se $a > 1$, sempre decrescente se $0 < a < 1$;
- il grafico interseca l'asse x in $(1; 0)$.



MATEMATICA E ASTRONOMIA

Quanto brillano le stelle? La magnitudine è la misura della quantità di luce che ci arriva da un corpo celeste (stelle, nebulose, galassie...) Dipende da tanti fattori, tra cui la temperatura, la distanza e la grandezza della stella. Gli antichi Greci dividevano le stelle visibili a occhio nudo in sei magnitudini. Nell'Ottocento si passò a una scala logaritmica.

▶ Scopri di più.

Cerca nel Web: Pogson, magnitudine assoluta, magnitudine apparente

8 Equazioni logaritmiche

▶ Esercizi a p. 150

DEFINIZIONE

Un'**equazione logaritmica** ha l'incognita che compare nell'argomento di almeno un logaritmo.

Listen to it

A **logarithmic equation** contains at least one logarithm whose argument is unknown.

Tra le equazioni logaritmiche, consideriamo quelle che possiamo scrivere nella forma:

$$\log_a A(x) = \log_a B(x),$$

dove con $A(x)$ e $B(x)$ indichiamo due funzioni dell'incognita x.
Per le condizioni di esistenza dei logaritmi deve essere: $A(x) > 0$ e $B(x) > 0$.
Dal momento che

$$A(x) = B(x) \quad \leftrightarrow \quad \log_a A(x) = \log_a B(x),$$

per risolvere l'equazione è sufficiente cercare le soluzioni di $A(x) = B(x)$ e controllare successivamente se queste soddisfano le condizioni di esistenza.

ESEMPIO

Risolviamo l'equazione

$$\log x + \log(x+3) = \log 2 + \log(2x+3).$$

Scriviamo le condizioni di esistenza imponendo che ciascun logaritmo presente nell'equazione abbia argomento maggiore di 0. Otteniamo il sistema:

$$\begin{cases} x > 0 \\ x+3 > 0 \\ 2x+3 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x > -3 \\ x > -\dfrac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \quad x > 0, \text{ cioè C.E.: } x > 0.$$

Applichiamo la proprietà del logaritmo di un prodotto:

$$\log[x(x+3)] = \log[2(2x+3)].$$

Passiamo all'uguaglianza degli argomenti:

$$x(x+3) = 2(2x+3) \rightarrow x^2 + 3x = 4x + 6 \rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow$$

$$x_1 = -2,\ x_2 = 3.$$

Il valore -2 non soddisfa la condizione di esistenza posta ($x > 0$), soddisfatta invece da 3, che quindi è l'unica soluzione dell'equazione logaritmica.

Animazione

Nell'animazione trovi lo svolgimento commentato di questo esempio e del successivo.

▶ Risolvi l'equazione:
$\log(x-2) - \log(2x-5) = 0.$
$[x = 3]$

A volte, è utile servirsi di un'incognita ausiliaria.

ESEMPIO

Risolviamo l'equazione $(\log_3 x)^2 - 2\log_3 x - 3 = 0$.

La condizione di esistenza del logaritmo è $x > 0$.

Poniamo $\log_3 x = t$ e sostituiamo:

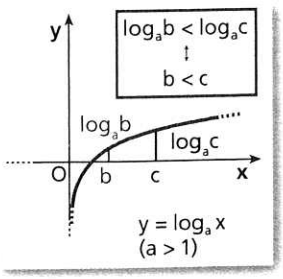
$$t^2 - 2t - 3 = 0 \rightarrow t = 1 \pm \sqrt{1+3} \rightarrow t_1 = 3,\ t_2 = -1,$$

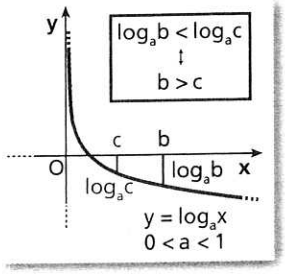
da cui $\log_3 x = -1 \rightarrow x_1 = \dfrac{1}{3}$, $\log_3 x = 3 \rightarrow x_2 = 27$, entrambe soluzioni accettabili perché soddisfano la condizione di esistenza.

▶ Risolvi l'equazione:
$(\log_5 x)^2 + 4\log_5 x + 3 = 0.$
$\left[x = \frac{1}{5};\ x = \frac{1}{125}\right]$

Negli esercizi vedremo anche come risolvere un'equazione logaritmica con metodo grafico.

TEORIA





Animazione

Nell'animazione osserva, mediante i grafici, il collegamento con il comportamento della funzione logaritmica.

9 Disequazioni logaritmiche

▶ Esercizi a p. 153

Consideriamo le disequazioni logaritmiche che possiamo scrivere nella forma

$$\log_a A(x) < \log_a B(x),$$

o nelle forme analoghe con gli altri segni di disuguaglianza.

Per passare da una disequazione di questo tipo a una riguardante gli argomenti $A(x)$ e $B(x)$, dobbiamo ricordare il comportamento della funzione logaritmica:

- per $a > 1$, $\log_a b < \log_a c \leftrightarrow b < c$;
- per $0 < a < 1$, $\log_a b < \log_a c \leftrightarrow b > c$;

con $b, c > 0$.

Le soluzioni di una disequazione logaritmica del tipo considerato si ottengono risolvendo il sistema formato da:

- le condizioni di esistenza della disequazione;
- la disequazione che si ottiene dalla disuguaglianza degli argomenti.

ESEMPIO

1. Risolviamo la disequazione

$$\log_5 (x-1) < 2.$$

Per la definizione di logaritmo, scriviamo: $2 = \log_5 25$, perché $5^2 = 25$.
La disequazione può essere scritta:

$$\log_5 (x-1) < \log_5 25.$$

Risolviamo il sistema.

$$\begin{cases} x-1 > 0 & \text{condizione di esistenza} \\ x-1 < 25 & \text{disuguaglianza fra gli argomenti, con lo stesso verso di quella fra i logaritmi (base maggiore di 1)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 1 \\ x < 26 \end{cases}$$

Le soluzioni della disequazione logaritmica sono: $1 < x < 26$.

2. Risolviamo la disequazione $\log_{\frac{1}{3}} (x-4) > \log_{\frac{1}{3}} 5x$.
È equivalente al seguente sistema.

$$\begin{cases} x-4 > 0 & \text{condizione di esistenza del primo logaritmo} \\ 5x > 0 & \text{condizione di esistenza del secondo logaritmo} \\ x-4 < 5x & \text{disuguaglianza fra gli argomenti, di verso contrario a quella fra i logaritmi (base compresa fra 0 e 1)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 4 \\ x > 0 \\ -4x < 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 4 \\ x > 0 \\ x > -1 \end{cases} \rightarrow x > 4$$

Le soluzioni della disequazione logaritmica sono: $x > 4$.

▶ Trova i valori per cui $\log_3 (x+2) \geq 0$. $[x \geq -1]$

▶ Risolvi la disequazione: $\frac{3}{\log_2 x} \geq \log_2 x + 2$, utilizzando un'incognita ausiliaria.

Animazione

10 Logaritmi ed equazioni e disequazioni esponenziali

Equazioni esponenziali risolubili con i logaritmi

▶ Esercizi a p. 156

Alcuni tipi di equazioni esponenziali si possono risolvere con i logaritmi.

ESEMPIO

Risolviamo l'equazione $7 \cdot 5^{2x} = 3^{x+1}$.

Poiché i due membri dell'equazione sono positivi, applichiamo il logaritmo in base 10 e otteniamo un'equazione equivalente:

$$\log(7 \cdot 5^{2x}) = \log 3^{x+1} \quad \rightarrow \quad \log 7 + 2x \log 5 = (x+1)\log 3.$$

L'equazione ottenuta è di primo grado nell'incognita x.

$$2x \log 5 - x \log 3 = \log 3 - \log 7 \quad \rightarrow \quad x(2\log 5 - \log 3) = \log 3 - \log 7 \quad \rightarrow$$

$$x = \frac{\log 3 - \log 7}{2\log 5 - \log 3}$$

Disequazioni esponenziali risolubili con i logaritmi

▶ Esercizi a p. 158

I logaritmi sono utili anche per risolvere disequazioni esponenziali.

ESEMPIO Animazione

Risolviamo $3 \cdot 2^x > 4 \cdot 3^{x+1}$.

Applichiamo una proprietà delle potenze e semplifichiamo:

$$3 \cdot 2^x > 4 \cdot 3^{x+1} \rightarrow 3 \cdot 2^x > 4 \cdot 3^x \cdot 3 \rightarrow 2^x > 4 \cdot 3^x.$$

Applichiamo i logaritmi ai due membri,

$$2^x > 4 \cdot 3^x \rightarrow \log 2^x > \log(4 \cdot 3^x),$$

tenendo presente che la disuguaglianza fra i logaritmi ha lo stesso verso di quella fra gli argomenti, perché la base 10 è maggiore di 1. Utilizziamo le proprietà dei logaritmi:

$$\log 2^x > \log(4 \cdot 3^x) \rightarrow x\log 2 > \log 4 + x\log 3 \rightarrow x(\log 2 - \log 3) > \log 4.$$

Dividiamo per $\log 2 - \log 3$; poiché è un numero negativo, cambiamo il verso:

$$x < \frac{\log 4}{\log 2 - \log 3}.$$

▶ Risolvi la disequazione: $\frac{6^{x-3}}{4} < 2 \cdot 5^{3x}$.

Animazione

Nell'animazione, oltre a quella dell'esempio, ti proponiamo di risolvere questa equazione:

$2^x + 2^{x+1} + 2^{x-1} = 15$.

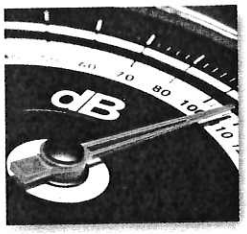
MATEMATICA INTORNO A NOI

Logaritmi e decibel

Il campo di udibilità è un intervallo di intensità sonore il cui limite inferiore (soglia del silenzio) vale 10^{-12} watt/metro^2 (W/m^2) e corrisponde al rumore di una zanzara a 3 m di distanza.

Il limite superiore (soglia del dolore) vale 1 W/m^2.

Il campo di udibilità occupa dunque 12 ordini di grandezza ed è comodo rappresentarlo con una scala logaritmica; in questa scala l'unità di misura è il decibel (simbolo dB).



▶ Che relazione c'è tra il livello di intensità percepita e l'intensità effettiva di un suono?

Cerca nel Web: livello di intensità sonora, decibel

Video

Logaritmi e decibel

L'intensità di un suono si misura in decibel, una scala di misura logaritmica.

▶ Come funziona?

▶ Perché si usa questa scala?

DEFINIZIONE DI LOGARITMO

179 **ESERCIZIO GUIDA** Calcoliamo $\log_2(4 \cdot \sqrt[3]{2})$ applicando la definizione di logaritmo.

$x = \log_2(4 \cdot \sqrt[3]{2})$ è equivalente a $2^x = 4 \cdot \sqrt[3]{2} \rightarrow 2^x = 2^2 \cdot 2^{\frac{1}{3}} \rightarrow 2^x = 2^{\frac{7}{3}} \rightarrow x = \frac{7}{3}$.

prima proprietà delle potenze

Quindi $\log_2(4 \cdot \sqrt[3]{2}) = \frac{7}{3}$.

Calcola i seguenti logaritmi applicando la definizione.

180 $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$; $\log_{10} 10$.

181 $\log_2 1$; $\log_2 2$.

182 $\log_3 243$; $\log_2 64$.

183 $\log_3 27$; $\log_5 25$.

184 $\log_2 16$; $\log_3 9$.

185 $\log_5 125$; $\log_7 49$.

186 $\log 100$; $\log 1000$.

187 $\log_{11} 121$; $\log_7 343$.

188 $\log_3 \frac{1}{9}\sqrt{3}$; $\log_2 \frac{1}{16}$.

189 $\log_5 0{,}04$; $\log_{745} 1$.

190 $\log_7(7\sqrt{7})$; $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$.

191 $\log_2(\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2})$; $\log \frac{1}{\sqrt[13]{10}}$.

192 $\log_5 \sqrt[5]{5}$; $\log_{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2}$.

193 **ESERCIZIO GUIDA** Data l'uguaglianza $\log_5 b = 2$, calcoliamo il valore di b applicando la definizione di logaritmo.

$\log_5 b = 2$ è equivalente a $5^2 = b$. Quindi $b = 25$.

Calcola il valore dell'argomento b, usando la definizione di logaritmo.

194 $\log_2 b = 1$; $\log_3 b = 4$.

195 $\log_3 b = -1$; $\log_2 b = -1$.

196 $\log_2 b = -2$; $\log_5 b = -2$.

197 $\log_2 b = \frac{1}{2}$; $\log_3 b = \frac{1}{4}$.

198 $\log_4 b = \frac{1}{2}$; $\log_5 b = \frac{1}{3}$.

199 $\log_3 b = 0$; $\log_{0,4} b = 1$.

200 $\log_5 b = -\frac{1}{3}$; $\log_{32} b = -\frac{1}{4}$.

201 $\log_4 b = -2$; $\log_{\frac{2}{3}} b = -\frac{1}{2}$.

202 $\log_{\frac{1}{2}} b = -2$; $\log_5 b = -\frac{2}{5}$.

203 $\log b = 2$; $\log(1 - b) = -1$.

204 **ESERCIZIO GUIDA** Data l'uguaglianza $\log_a 16 = 2$, calcoliamo la base a.

Applichiamo la definizione di logaritmo: $a^2 = 16 \rightarrow a = \pm 4$.

La base di un logaritmo può essere solo positiva e diversa da 1, quindi $a = 4$.

$\log_a b = x \leftrightarrow a^x = b$
$a > 0, a \neq 1, b > 0$

Calcola il valore della base a usando la definizione di logaritmo.

205 $\log_a 9 = 2$; $\log_a 125 = 3$.

206 $\log_a 100 = 2$; $\log_a 2 = 1$.

207 $\log_a \frac{1}{4} = 2$; $\log_a \frac{16}{81} = 4$.

208 $\log_a \frac{1}{4} = -2$; $\log_a \frac{8}{27} = -3$.

209 $\log_a \frac{1}{81} = -4$; $\log_a \frac{4}{5} = -1$.

210 $\log_a 5 = 1$; $\log_a 100 = -2$.

211 $\log_a 4 = -2$; $\log_a \frac{1}{49} = -2$.

212 $\log_a 5 = -1$; $\log_a 3 = -2$.

213 $\log_a 4 = \frac{1}{2}$; $\log_a \frac{1}{2} = -2$.

214 $\log_a 5 = -2$; $\log_a 64 = 5$.

215 $\log_a \frac{1}{100} = -2$; $\log_a 6 = 36$.

216 $\log_a 7 = -\frac{1}{2}$; $\log_a 4 = \frac{1}{3}$.

217 $\log_a(2a - 3) = 1$; $\log_a(2\sqrt{a} - 2) = \frac{1}{2}$.

6 Proprietà dei logaritmi

▶ Teoria a p. 128

VERO O FALSO?

218 a. $\log 5 - \log 4 = \log 1$ V F

b. $\log \frac{4}{3} = \frac{\log 4}{\log 3}$ V F

c. $\log_2 \sqrt{6} = \frac{1}{2}\log_2 6$ V F

d. $\log_2(2 \cdot 7) = 1 + \log_2 7$ V F

e. $(\log_3 8)^2 = 2\log_3 8$ V F

219 a. $2\log_3 5 = \log_3 10$ V F

b. $\log_4 9 = \log_2 3$ V F

c. $\frac{1}{2}\log_2 36 = \log_2 \frac{1}{2} \cdot 36$ V F

d. $(\log_2 7)^2 = \log_2 49$ V F

e. $\frac{\log 11}{2} = \log\sqrt{11}$ V F

220 **ESERCIZIO GUIDA** Applicando le proprietà dei logaritmi sviluppiamo l'espressione $\log_2 \frac{a^6}{13 \cdot \sqrt[4]{19}}$.

$\log_2 \frac{a^6}{13\sqrt[4]{19}} =$) logaritmo di un quoziente

$\log_2(a^6) - \log_2(13 \cdot \sqrt[4]{19}) =$) logaritmo di un prodotto

$\log_2 a^6 - (\log_2 13 + \log_2 \sqrt[4]{19}) =$) logaritmo di una potenza

$6\log_2 a - \log_2 13 - \frac{1}{4}\log_2 19$

$\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$

$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

$\log_a b^n = n \cdot \log_a b$

Nell'ipotesi in cui tutti gli argomenti dei logaritmi considerati siano positivi, sviluppa le seguenti espressioni applicando le proprietà dei logaritmi.

221 $\log\sqrt[3]{4}$ $\left[\frac{1}{3}\log 4\right]$

222 $\log(4\sqrt{2})$ $\left[\log 4 + \frac{1}{2}\log 2\right]$

223 $\log\frac{3}{2}$ $[\log 3 - \log 2]$

224 $\log\frac{3}{5a}$ $[\log 3 - \log 5 - \log a]$

225 $\log_5(3ab^2)$ $[\log_5 3 + \log_5 a + 2\log_5 b]$

226 $\log\frac{3\sqrt{a}}{b}$ $\left[\log 3 + \frac{1}{2}\log a - \log b\right]$

227 $\log_2\left(\frac{2 \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt{2}}\right)$ $\left[\frac{5}{6}\right]$

228 $\log\frac{5a}{b^4}\sqrt[7]{b}$ $\left[\log 5 + \log a - \frac{27}{7}\log b\right]$

229 $\log_{\sqrt{2}}\frac{\sqrt[5]{4}}{8\sqrt{2}}$ $\left[-\frac{31}{5}\right]$

230 $\log(a^4 b^5 \sqrt{7})$ $\left[4\log a + 5\log b + \frac{1}{2}\log 7\right]$

$2\log_5 10 + \log_5 25 - \frac{1}{3} \cdot \log_5 64 =$) logaritmo di una potenza

$\log_5 10^2 + \log_5 25 - \log_5 \sqrt[3]{64} =$) logaritmo di un prodotto

$\log_5 100 \cdot 25 - \log_5 4 =$) logaritmo di un quoziente

$\log_5 \frac{2500}{4} = \log_5 625 = \log_5 5^4 = 4$

Applica le proprietà dei logaritmi per scrivere le seguenti espressioni sotto forma di un unico logaritmo, supponendo che tutti gli argomenti dei logaritmi considerati siano positivi.

234 $\log 3 + \log 7 - \log 6$ $\left[\log\frac{7}{2}\right]$

235 $\log_2 50 - \log_2 400 + \log_2 4$ $[-1]$

236 $\frac{1}{2}\log 81 - \log\frac{9}{7} + \log\frac{10}{7}$ $[1]$

237 $\frac{1}{4}\log 81 + \log\frac{9}{3} - \log 9$ $[0]$

238 $\frac{1}{3}\log 27 + 2\log\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{9} + \log 2$ $[\log 2]$

239 $\frac{1}{2}\log_2 100 - (\log_2 24 - \log_2 6) + 1$ $[\log_2 5]$

240 $2 + \log_2 24 + \log_2 3 - \left(2\log_2 - \log_2\frac{1}{6}\right)$ $[\log_2 12]$

241 $\log_3 a + \log_3 b - \log_3 5 + \log_3\frac{1}{b}$ $\left[\log_3\frac{a}{5}\right]$

242 $\frac{1}{2}\log_3 x + 2\log_3(x+1) - \log_3 7$ $\left[\log_3\frac{\sqrt{x}(x+1)^2}{7}\right]$

243 $\frac{1}{2}(\log 7 + \log x - \log 3) + \log\sqrt{3x}$ $[\log x\sqrt{7}]$

EQUAZIONI LOGARITMICHE

308 **ESERCIZIO GUIDA** Risolviamo $\log_3(x+8)=2$.

- Condizioni di esistenza: $x+8>0 \rightarrow x>-8$.
- Risolviamo l'equazione applicando la definizione di logaritmo.

$$x+8=3^2 \rightarrow x+8=9 \rightarrow x=1$$ accettabile perché maggiore di -8

Risolvi le seguenti equazioni utilizzando la definizione di logaritmo.

309 $\log_2(x-4)=0$ [5]

310 $2\log_2(x+3)=8$ [13]

311 $-\log(x+102)+2=0$ [−2]

312 $\log(x^2-3)=0$ [±2]

313 $\log_2\left(\frac{5}{4}x-1\right)=-2$ [1]

314 $\log_3(x^2+2x)=1$ [−3; 1]

315 $3-\log_2(x^2-2x)=0$ [−2; 4]

316 $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-8)=-3$ [±4]

317 $\log\frac{x-9}{4x}=0$ [−3]

318 $\log_2\frac{2x}{x+3}=-1$ [1]

319 **ESERCIZIO GUIDA** Risolviamo l'equazione: $\log_2(x-2)-\log_2(8-x)=\log_2 x-3$.

- Condizioni di esistenza:

$$\begin{cases} x-2>0 \\ 8-x>0 \\ x>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>2 \\ x<8 \\ x>0 \end{cases} \rightarrow 2<x<8$$

- Risolviamo l'equazione.
Al secondo membro, poiché per la definizione di logaritmo è $\log_a a=1$, possiamo scrivere:

$$3=3\cdot 1=3\log_2 2=\log_2 2^3=\log_2 8.$$

Sostituiamo questo risultato nell'equazione data e applichiamo le proprietà dei logaritmi.

$$\log_2(x-2)-\log_2(8-x)=\log_2 x-\log_2 8$$

$$\log_2\frac{x-2}{8-x}=\log_2\frac{x}{8}$$) uguagliamo gli argomenti

$$\frac{x-2}{8-x}=\frac{x}{8}$$) trasformiamo in equazione intera ricordando che $2<x<8$

$$8(x-2)=x(8-x)$$

$$x^2-16=0 \begin{cases} x_1=4 \\ x_2=-4 \end{cases}$$ non accettabile

- La soluzione dell'equazione è: $x=4$.

Risolvi le seguenti equazioni.

320 $\log_5 x+\log_5 3=\log_5 6$ [2]

321 $\log_2(x+1)=2\log_2 3$ [8]

322 $2\log(x-7)=\log 25$ [12]

323 $\log_2(2x+11)=\log_2(x+10)$ [−1]

324 $\log_2 x-\log_2 7=\log_2(x-1)$ $\left[\frac{7}{6}\right]$

325 $\log x-2\log 3=\log(x-1)$ $\left[\frac{9}{8}\right]$

326 $\log x-\log(x+1)=\log 2-\log 5$ $\left[\frac{2}{3}\right]$

327 $\log(x-1)+\log(x-3)=\log 8$ [5]

328 $\log_2 x+\log_2(x-1)=2\log_2 x$ [impossibile]

329 $\log(3x-1)+\log(x-2)=\log 22$ [4]

330 $\log_2(x-2)-\log_2 x=\log_2 x$ [impossibile]

331 $\log_5(x^2+1)=\log_5 2+\log_5(x^2-4)$ [3; −3]

332 $\log_3(x-2)+\log_3 x=2\log_3 x$ [impossibile]

333 $\log_5(x+1)+\log_5 4=\log_5 6x$ [2]

334 $\log_7(x-3)=\log_7(x^2-3x)$ [impossibile]

335 $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4x)+\log_2 2x-1=0$ [5]

---

336 $\log_2 8x-2\log_2 x=3$ [1]

337 $\log_3(2x+7)=2+\log_3 x$ [1]

338 $2\log_2\sqrt{x-2}+\log_2 x=3$ [4]

339 $\log_2(x^2+1)=1-\log_{\frac{1}{2}} x$ [1]

---

340 $\log(x-1)-\log(x+1)=\log(x-3)-\log(x-2)$ [5]

341 $\log(2x^2+5x-3)-\log(x+3)=\log(4-x)$ $\left[\frac{5}{3}\right]$

342 $\log(10-x^2)-\log 8=2\log\frac{x}{5}-2\log\frac{\sqrt{2}}{5}$ [$\sqrt{2}$]

343 $\log_2(x^2+2x+8)=2+\log_2(x+2)$ [0; 2]

9 Disequazioni logaritmiche

▶ Teoria a p. 132

I due membri si possono scrivere come logaritmi di uguale base

390 **ESERCIZIO GUIDA** Risolviamo: **a.** $\log_{11}(2-x) > \log_{11}(x+2)$; **b.** $\log_{\frac{1}{5}} 20x < -3$.

a. Dobbiamo risolvere il seguente sistema.

$$\begin{cases} 2-x>0 & \text{condizione di esistenza} \\ x+2>0 & \text{condizione di esistenza} \\ 2-x>x+2 & \text{disuguaglianza fra gli argomenti con lo stesso verso di quella fra i logaritmi, dato che la base è maggiore di 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x>-2 \\ x>-2 \\ -2x>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x<2 \\ x>-2 \\ x<0 \end{cases} \rightarrow -2<x<0$$

b. Per la definizione di logaritmo, possiamo scrivere $-3 = \log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = \log_{\frac{1}{5}} 5^3 = \log_{\frac{1}{5}} 125$ e perciò la disequazione assume la forma: $\log_{\frac{1}{5}} 20x < \log_{\frac{1}{5}} 125$.

Ora dobbiamo risolvere il seguente sistema.

$$\begin{cases} 20x>0 & \text{condizione di esistenza} \\ 20x>125 & \text{disuguaglianza fra gli argomenti con verso opposto rispetto a quella fra i logaritmi, essendo la base minore di 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>0 \\ 20x>125 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x>\frac{25}{4} \end{cases} \rightarrow x>\frac{25}{4}$$

ESERCIZI

Risolvi le seguenti disequazioni.

391 ●○ $\log_3 x > 2$ $[x>9]$

392 ●○ $\log_2 x \le \log_2(3x-1)$ $\left[x \ge \frac{1}{2}\right]$

393 ●○ $\log(9-x) \ge \log 12$ $[x \le -3]$

394 ●○ $\ln x < 1$ $[0<x<e]$

395 ●○ $\log x \le -1$ $\left[0<x\le\frac{1}{10}\right]$

396 ●○ $\log_{\frac{3}{4}} x < 2$ $\left[x>\frac{9}{16}\right]$

397 ●○ $\log(x-3) \ge 0$ $[x \ge 4]$

398 ●○ $\log_{\frac{1}{2}}(2x) > 0$ $\left[0<x<\frac{1}{2}\right]$

399 ●○ $\log_3(2-5x) > 2$ $\left[x<-\frac{7}{5}\right]$

400 ●○ $\log_{\frac{1}{3}}(4x-3) > -1$ $\left[\frac{3}{4}<x<\frac{3}{2}\right]$

401 ●○ $\log_5\left(\frac{2-x}{x+3}\right) < \log_5 4$ $[-2<x<2]$

402 ●● $\log(2x-x^2) < \log(x-2)$ [impossibile]

403 ●○ **TEST** Quale fra le seguenti disequazioni ammette come soluzioni $x>0$?

A $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > 0$

B $\log_2(x+1) > 0$

C $\log x > 10$

D $\log_2 x > 0$

E $\log_{\frac{1}{2}} x < 0$

Utilizziamo anche le proprietà dei logaritmi

Risolvi le seguenti disequazioni.

404 ●○ $\log_3 x^2 - \log_3 x < 3$ $[0<x<27]$

405 ●○ $\log_2(x-1) + \log_2 x > 1$ $[x>2]$

406 ●○ $\log_3(2x-3) - \log_3(x+1) < 2$ $\left[x>\frac{3}{2}\right]$

407 ●○ $\log_{\frac{3}{5}}(2-x) + \log_{\frac{3}{5}}(x+2) > \log_{\frac{3}{5}} 3x$ $[1<x<2]$

408 ●○ $\log_{\frac{1}{4}}(x^2-6) - \log_{\frac{1}{4}}(x-3) > -1$ [impossibile]

409 ●○ $\log(x+5) - \log(4-x) + \log(3x-1) > \log(3x-1) - \log(x+4)$ $\left[\frac{1}{3}<x<4\right]$